



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Tesis doctoral

**Aspectos cualitativos y numéricos de
la ecuación hipergeométrica**

Autor: Alfredo Deaño Cabrera

Director: José Javier Segura Sala

Programa de doctorado en Ingeniería Matemática

Septiembre de 2006

Aspectos cualitativos y numéricos de la ecuación hipergeométrica

Memoria que se presenta para optar al título de Doctor en Matemáticas
por la Universidad Carlos III de Madrid

Autor: Alfredo Deaño Cabrera

Director: José Javier Segura Sala

Programa de doctorado en Ingeniería Matemática

Departamento de Matemáticas

Escuela Politécnica Superior

Universidad Carlos III de Madrid

Septiembre de 2006

*A mi familia,
y en particular a mi abuelo,
quien seguro que intentará leerlo.*

Agradecimientos

La parte de agradecimientos de una tesis es un apartado complicado de escribir, puesto que no solamente es una sección que todo el mundo lee, sino que además es la única que la mayoría de la gente lee. Todos esperan a ver cómo el autor distribuye los agradecimientos, qué le debe a cada persona, en lo personal o en lo profesional, y qué le dice a cada uno. En ese sentido las extravagancias son arriesgadas, así que en este caso seguiré el orden estándar.

El primer y principal agradecimiento va dirigido a mi director de tesis, J. Javier Segura, quien a pesar de otras muchas ocupaciones y dificultades se comprometió y trabajó intensamente para sacar esta tesis adelante, y creo que incluso en ocasiones disfrutó con ello. En segundo lugar es obligado citar a Amparo Gil, quien no solamente figura como colaboradora en varias partes de este trabajo, sino que lo siguió muy de cerca y mostró la misma diligencia, habilidad y paciencia para corregir código Maple que para buscar becas y ayudas de movilidad y financiación.

En tercer lugar, un agradecimiento especial a Francisco Marcellán, quien me introdujo en el programa de doctorado en Ingeniería Matemática y ha mostrado siempre una generosidad e interés por el trabajo sorprendentemente compatibles con su inverosímil agenda de compromisos.

La gente de la uc3m se merece sin duda muchas y buenas palabras. Tanto los del grupo de polinomios ortogonales como los ajenos a él han ayudado con amistad, consejos y buenos ratos a que esto fuese más llevadero, lo cual no tiene precio. Mención aparte merecen mis dos compañeros de despacho, Luis Lafuente y Roberto Costas. Aparte de la ayuda científica y matemática tanto en docencia como en investigación, que ha sido considerable por parte de los dos, entre los tres conseguimos crear un ambiente de despacho difícil de superar, como confirmará cualquiera que haya pasado por allí en este tiempo.

Tengo la suerte de tener gente fuera de España a la que debo cosas, aunque no sé si llegarán a recibir este mensaje: Annie Cuyt, Brigitte Verdonk y la gente del departamento de Matemáticas e Informática de la Universidad de Amberes, que me trataron muy bien en la estancia que hice allí hace dos años, y a los que reencontré felizmente el año pasado en Rodas. Y también a Jean-Michel Muller, Nathalie

Revol y el resto de gente del L.I.P. en la École Normale Supérieure de Lyon, por mostrarme aspectos del cálculo numérico que no se olvidan fácilmente.

En el plano personal el primer agradecimiento va por supuesto para mi familia. Empezando por los más cercanos y hasta los más lejanos todos han ayudado, desde los imprudentes que insistían en enterarse del tema de la tesis hasta los que preguntaban que cuándo estaría terminada, pasando por los que se reían de ella y de la investigación en Matemáticas, contribuyendo así a aligerar el peso. Cada uno sabe la parte que le corresponde.

Entre las amistades más cercanas, J.C. siempre estuvo ahí en lo bueno y en lo malo, en ocasiones con más confianza en el trabajo que yo mismo. ¿Quién puede pedir más? E.A. sabe lo que es hacer y escribir una tesis y ha pasado por una experiencia similar. Nos hemos dado ánimos por el camino, y eso siempre ayuda.

Por último, un agradecimiento un tanto peculiar para la gente que conozco en mi vida musical. Aunque no han brindado apoyo técnico, han mostrado siempre interés por este trabajo, y sobre todo han ayudado a que siga siendo músico además de matemático, dándome ánimo y apoyo, lo cual me ha servido para ver este trabajo desde otra perspectiva. A todos ellos, muchas gracias.

Para intentar asegurarme de no quedar mal con nadie, si me olvido de mencionar a alguien explícitamente y esa persona no sabe si se cuenta entre la gente a la que debo agradecimientos, que me perdone primero y que tenga por seguro que sí después. De los errores y omisiones soy el único responsable, por supuesto.

A.D.C.

Madrid, septiembre de 2006.

Este trabajo ha sido posible gracias a los proyectos del Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-01367 y MTM2006-09050.

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Ecuaciones de tipo hipergeométrico	12
1.1.1. Ecuación hipergeométrica de Gauss	13
1.1.2. Ecuación hipergeométrica confluyente	16
1.1.3. Ecuación hipergeométrica de Bessel	20
1.2. Ceros reales de funciones hipergeométricas	20
1.2.1. Teoremas de Sturm	20
1.2.2. Transformaciones de Liouville-Green	23
1.2.3. Ejemplos	24
1.2.4. Cambios de variable admisibles	25
1.3. Relaciones de recurrencia a tres términos	26
1.3.1. Aspectos numéricos	28
1.3.2. Fracciones continuas asociadas	31
1.4. Métodos de cálculo de ceros reales de funciones hipergeométricas . .	33
2. Ceros reales de funciones hipergeométricas. Propiedades de tipo Sturm	37
2.1. Preliminares y antecedentes	37
2.2. Transformaciones LG de la ecuación de Gauss	38
2.2.1. Cambios de variable admisibles	38
2.2.2. Análisis del caso $p + q = 1$	41
2.2.3. Casos no globales	46
2.2.4. Casos particulares	48
2.2.5. Análisis del caso $q = 0$ ($p = 0$)	51
2.2.6. Casos no globales	53
2.2.7. Casos particulares	55
2.2.8. Propiedades implícitas	57
2.3. Transformaciones LG de la ecuación de Kummer	59
2.3.1. Cambios de variable admisibles	59
2.3.2. Casos no globales	61
2.3.3. Casos particulares	61
2.4. Transformaciones LG de la ecuación de Bessel	64
2.5. Conclusiones y problemas relacionados	66

3. Condicionamiento de recurrencias de tipo hipergeométrico	69
3.1. Antecedentes	69
3.2. Soluciones mínimas y dominantes	70
3.3. Soluciones mínimas y dominantes de recurrencias hipergeométricas	72
3.3.1. Recurrencias de las funciones hipergeométricas de Gauss	72
3.3.2. Recurrencias de las funciones hipergeométricas confluentes	75
3.4. Fracciones continuas asociadas	79
3.5. Soluciones transitoriamente mínimas	80
3.5.1. Motivación	80
3.5.2. Patrones de signos de las soluciones de la recurrencia	82
3.5.3. Signos de los coeficientes de las recurrencias	83
3.5.4. Estimación del error para la fracción continua	85
3.6. Recurrencias simétricas	87
3.6.1. Funciones de Bessel modificadas	88
3.7. Funciones hipergeométricas confluentes	90
3.7.1. Recurrencia (+ +)	90
3.7.2. Estimación asintótica del error	92
3.7.3. Recurrencia (+ 0)	94
3.8. Funciones hipergeométricas de Gauss	95
3.8.1. Recurrencia (+ + +)	95
3.8.2. El límite confluyente de la recurrencia (+ + +)	97
3.9. Análisis del error en precisión finita	98
3.9.1. Errores en la evaluación numérica de las fracciones continuas	99
3.9.2. Errores en el cálculo numérico de y_n	100
3.10. Conclusiones y problemas relacionados	102
4. Cálculo de ceros reales de funciones hipergeométricas	105
4.1. Preliminares y antecedentes	105
4.2. Métodos de punto fijo	106
4.3. Aspectos computacionales	108
4.3.1. Cálculo de cocientes y fracciones continuas	109
4.3.2. Tests numéricos	111
4.4. Funciones de Bessel	112
4.4.1. Cocientes y fracciones continuas	112
4.4.2. Aspectos numéricos	113
4.5. Funciones de Coulomb	115
4.6. Función hipergeométrica confluyente $M(a; c; x)$	116
4.6.1. Cocientes y fracciones continuas	116
4.6.2. Aspectos numéricos	119
4.7. Función hipergeométrica confluyente $U(a; c; x)$	122
4.7.1. Métodos de cálculo y tiempo de computación	123
4.8. Función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$	124
4.9. Conclusiones y problemas relacionados	126

A. Análisis de la función $\Omega(x)$	129
A.1. Propiedades de la función $\Omega(x)$ en la ecuación de Gauss	129
A.1.1. Caso $p + q = 1$	129
A.1.2. Caso $q = 0$	134
A.1.3. Casos $ p = \alpha $, $ q = \beta $	139
A.2. Propiedades de la función $\Omega(x)$ en la ecuación de Kummer	140
B. Descripción del paquete Maple zerosSF	145
B.1. Funciones del paquete zerosSF	145
B.2. Ejemplos	146
B.2.1. Funciones de Bessel	146
B.2.2. Polinomios de Laguerre y Hermite	147
B.2.3. Polinomios de Jacobi	148
Bibliografía	149

Capítulo 1

Introducción

En esta memoria exponemos el trabajo de investigación realizado acerca de aspectos cualitativos y numéricos de la ecuación hipergeométrica. En nuestro caso el nombre de ecuación hipergeométrica hace referencia a la ecuación hipergeométrica de Gauss y sus límites confluentes. Las soluciones de estas ecuaciones se denominan funciones hipergeométricas de Gauss y funciones hipergeométricas confluentes, respectivamente.

La aparición formal de estas funciones se remonta al trabajo pionero de C. F. Gauss [30], a principios del siglo XIX, aunque algunos aspectos particulares ya eran conocidos anteriormente. Por ejemplo L. Euler en su *Institutiones calculi integralis* (1768) ya utilizaba la ecuación hipergeométrica y el método de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de series de potencias, y los que hoy se conocen como polinomios de Legendre habían aparecido ya en conexión con problemas de mecánica newtoniana. Véase el resumen histórico por ejemplo en [3]. Desde entonces las funciones hipergeométricas han sido objeto de amplio estudio tanto desde el punto de vista puramente matemático como por el interés que revisten en las aplicaciones.

Los aspectos cualitativos y numéricos que analizaremos en este trabajo son los siguientes:

- Estudio analítico de los ceros reales de las funciones que son soluciones de la ecuación hipergeométrica, en concreto propiedades de tipo Sturm, es decir, cotas de distancias entre ceros consecutivos y monotonía de dichas distancias.
- Propiedades de condicionamiento numérico de las relaciones de recurrencia a tres términos que satisfacen las funciones de Gauss y Kummer, así como de las fracciones continuas asociadas a dichas recurrencias.

Estos dos temas de estudio convergen en el capítulo final en un método de punto fijo que se puede utilizar para calcular ceros reales de funciones hipergeométricas. Por un lado, las transformaciones de las ecuaciones diferenciales que utilizamos para

obtener propiedades de tipo Sturm tienen un análogo para sistemas de ecuaciones difero-diferenciales (DDEs), que relacionan pares de funciones hipergeométricas. A partir de estos sistemas se pueden construir métodos de punto fijo sobre cocientes de funciones hipergeométricas, que sirven para calcular numéricamente los ceros reales de dichas funciones. Por otro lado, dichos métodos de punto fijo aplican las recurrencias a tres términos y fracciones continuas asociadas como método de evaluación de los cocientes de funciones hipergeométricas. En este sentido, las propiedades numéricas de estas recurrencias y fracciones continuas son esenciales para el buen funcionamiento del algoritmo.

En esta introducción haremos primeramente un breve repaso de las propiedades de la ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss y de sus límites confluentes, así como de las soluciones de estas ecuaciones. Este material puede ser consultado y ampliado en numerosas referencias, como por ejemplo [1, 5, 25, 58, 59, 82]. Posteriormente el capítulo está concebido como una exposición breve de los temas y una motivación de los problemas concretos que son objeto de estudio en esta memoria.

1.1. Ecuaciones de tipo hipergeométrico

En esta sección vamos a recordar algunos aspectos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, con el fin de presentar la ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss, y posteriormente sus límites confluentes. El enfoque elegido en este trabajo está tomado principalmente de [45], véanse también [46] o [67], y el planteamiento a partir de la ecuación diferencial nos parece coherente con respecto a los capítulos posteriores, en especial el de las propiedades de tipo Sturm de los ceros.

Si consideramos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$y''(x) + B(x)y'(x) + A(x)y(x) = 0, \quad (1.1)$$

decimos que un punto $x = x_0$ es un punto **regular** si tanto $A(x)$ como $B(x)$ son analíticas en dicho punto $x = x_0$. Si esta condición no se cumple, pero $xB(x)$ y $x^2A(x)$ sí son analíticas en $x = x_0$, entonces se dice que $x = x_0$ es un punto **singular regular** de la ecuación. En otro caso $x = x_0$ es un punto **singular irregular**. No se excluye la posibilidad de que $x_0 = \infty$, en cuyo caso se aplica el cambio de variable $\zeta = 1/x$ y el estudio se lleva a cabo sobre la ecuación transformada en el punto $\zeta = 0$.

Cuando los únicos puntos singulares de una ecuación diferencial son puntos singulares regulares entonces se dice que la ecuación es **de tipo Fuchs**. Si la ecuación presenta uno o dos puntos singulares regulares, entonces es resoluble mediante funciones elementales, como se puede ver en [45]. Cuando el número de puntos singulares

es igual a tres se obtiene la ecuación de Riemann-Papperitz, cuyos coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 y''(x) + & \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{x - x_1} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{x - x_2} + \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{x - x_3} \right) y'(x) \\
 & - \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{(x - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{\beta_1 \beta_2}{(x - x_2)(x_3 - x_1)} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(x - x_3)(x_1 - x_2)} \right) \\
 & \times \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} y(x) = 0
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.1. Ecuación hipergeométrica de Gauss

En la ecuación de Riemann-Papperitz los puntos singulares son $x = x_1$, $x = x_2$ y $x = x_3$, y los exponentes correspondientes son respectivamente (α_1, α_2) , (β_1, β_2) y (γ_1, γ_2) . Mediante una transformación de tipo Moebius es posible situar las singularidades en $x = 0$, $x = \infty$ y $x = 1$, y renombrando los parámetros el resultado es la **ecuación hipergeométrica de Gauss**:

$$x(1 - x)y''(x) + [c - (a + b + 1)x]y'(x) - aby(x) = 0 \quad (1.3)$$

Tanto la variable como los parámetros de esta ecuación pueden ser complejos (con ciertas restricciones que veremos más adelante), pero en este trabajo supondremos, salvo que se indique otra cosa, que tanto x como a , b y c son reales.

El método de Frobenius proporciona las siguientes soluciones en forma de serie de potencias en torno al origen:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2} + \dots \quad (1.4)$$

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{(2-c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.5)$$

donde hemos utilizado la notación habitual para el símbolo de Pochhammer:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \quad (1.6)$$

La función $y_1(x)$ se conoce como **función hipergeométrica de Gauss**. Si $c \notin \mathbb{Z}$ entonces escribimos las dos soluciones independientes en torno a $x = 0$ con la notación habitual:

$$y_1(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right) \quad (1.7)$$

$$y_2(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+1-c, b+1-c \\ 2-c \end{matrix}; x \right) \quad (1.8)$$

De manera análoga es posible obtener pares de soluciones independientes en serie de potencias en torno a los puntos $x = 1$ y $x = \infty$. Si $c - a - b \notin \mathbb{Z}$ podemos construir el siguiente par:

$$y_3(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ a + b + 1 - c \end{matrix} ; 1 - x \right), \quad (1.9)$$

$$y_4(x) = (1 - x)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c - b, c - a \\ c - a - b + 1 \end{matrix} ; 1 - x \right). \quad (1.10)$$

Si $a - b \notin \mathbb{Z}$ entonces tenemos:

$$y_5(x) = (-x)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, a + 1 - c \\ a + 1 - b \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right), \quad (1.11)$$

$$y_6(x) = (-x)^{-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} b, b + c - 1 \\ b + 1 - a \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right). \quad (1.12)$$

Es sencillo comprobar que los desarrollos anteriores son válidos en $S_0 = |x| < 1$, $S_1 = |1 - x| < 1$ y $S_\infty = |x| > 1$, respectivamente. Mediante las transformaciones racionales lineales que dejan invariantes los puntos $x = 0$, $x = \infty$ y $x = 1$ podemos generar soluciones alternativas de la ecuación diferencial. Remitimos al lector a las referencias [25, 45, 58, 82], entre otras, para consultar el conjunto completo de las 24 soluciones de Kummer para la ecuación hipergeométrica de Gauss. A modo de ejemplo citamos aquí las **identidades de Euler**:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = (1 - x)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c - a, c - b \\ c \end{matrix} ; x \right), \quad (1.13)$$

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = (1 - x)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, c - b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{x - 1} \right). \quad (1.14)$$

Otra identidad que será de utilidad más adelante es la siguiente:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = (1 - x)^{-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c - a, b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{x - 1} \right). \quad (1.15)$$

Las identidades entre soluciones de la ecuación de Gauss permiten además ampliar los dominios de definición que teníamos a partir de las expresiones en serie de potencias, mediante el principio de prolongación analítica.

En general es posible extender los dominios de las soluciones a todo el plano complejo menos un corte, que en el caso de la función de Gauss (1.7) se suele tomar en la semirrecta $[1, \infty)$. Es claro que allí donde estén bien definidas las funciones del conjunto original $y_1(x), y_2(x), \dots, y_6(x)$ debe haber combinaciones lineales que

relacionen cualesquiera tres de ellas, con normalizaciones adecuadas. A continuación damos ejemplos de dichas fórmulas, que se pueden encontrar en [1, 15.3.6-7], y remitimos al lector a las referencias citadas en la bibliografía para otros resultados similares.

$$y_1(x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}y_3(x) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}y_4(x), \quad \arg(1-x) < \pi \quad (1.16)$$

$$y_1(x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}y_5(x) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}y_6(x), \quad \arg(-x) < \pi \quad (1.17)$$

Asimismo, enumeramos aquí otras propiedades de las funciones de Gauss que utilizaremos posteriormente. Estas y otras propiedades se pueden encontrar en referencias como por ejemplo [1, 25, 54, 82]:

1. Teniendo en cuenta la definición del símbolo de Pochhammer (1.6) y también (1.7), es claro que la función hipergeométrica no está definida si el parámetro c es un entero negativo o si es 0. En ocasiones en lugar de la función de Gauss que hemos definido se utiliza la siguiente:

$${}_2F_1(a, b; c; x) := \frac{1}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right). \quad (1.18)$$

Esta función tiene la importante propiedad de que está bien definida para cualesquiera valores de a , b y c .

2. Si a y/o b son enteros negativos entonces la serie de potencias queda truncada y la función de Gauss se convierte en un polinomio. Por ejemplo, si $a = -m$:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, b \\ c \end{matrix}; x\right) = 1 - \frac{mb}{c}x + \frac{(-m)_2(b)_2}{(c)_2} \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-m)_m(b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!} \quad (1.19)$$

Es interesante señalar que si en este caso $c = -n$, con la condición de que $n > m$, entonces la función está bien definida, a pesar de lo expuesto en el apartado anterior.

3. La función hipergeométrica de Gauss es simétrica en los parámetros a y b :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} b, a \\ c \end{matrix}; x\right). \quad (1.20)$$

4. Las sucesivas derivadas de una función hipergométrica de Gauss son también funciones de la misma familia, con los parámetros desplazados:

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix}; x\right). \quad (1.21)$$

5. Las funciones hipergeométricas de Gauss incluyen varios casos importantes de funciones, tanto elementales como especiales. Por ejemplo:

- Polinomios de Jacobi:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; \frac{1-x}{2} \right). \quad (1.22)$$

Esta familia incluye los polinomios de Legendre, Chebyshev y Gegenbauer.

- Función Beta incompleta:

$$B_x(p, q) = \frac{x^p}{p} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} p, 1-q \\ 1+p \end{matrix} ; x \right). \quad (1.23)$$

- Funciones de Legendre:

$$P_\nu(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\nu, \nu + 1 \\ 1 \end{matrix} ; \frac{1-x}{2} \right), \quad x > -1 \quad (1.24)$$

$$Q_\nu(x) = C_\nu(x) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \nu/2 + 1, \nu/2 + 1/2 \\ \nu + 3/2 \end{matrix} ; \frac{1}{x^2} \right), \quad x > 1, \quad (1.25)$$

donde

$$C_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 3/2)(2x)^{\nu+1}}.$$

Cuando $\nu = -1/2 + i\tau$, donde $\tau \in \mathbb{R}$, se obtienen las funciones cónicas [82].

- Integrales elípticas:

$$K(x) := \int_0^{\pi/2} (1 - x^2 \sin^2(\theta))^{-1/2} d\theta = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix} ; x^2 \right), \quad (1.26)$$

$$E(x) := \int_0^{\pi/2} (1 - x^2 \sin^2(\theta))^{1/2} d\theta = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix} ; x^2 \right). \quad (1.27)$$

1.1.2. Ecuación hipergeométrica confluyente

El punto de partida para construir esta ecuación es la ecuación diferencial de Gauss (1.3):

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0.$$

Consideramos el cambio de variable $x \rightarrow x/b$, de modo que la ecuación resultante pasa a tener tres puntos singulares regulares: $x = 0$, $x = \infty$ y $x = b$. Si hacemos

$b \rightarrow \infty$ en el punto del infinito confluyen las dos singularidades (lo que da nombre a la ecuación), dando lugar a un punto singular irregular. Operando formalmente en la ecuación diferencial llegamos a la **ecuación hipergeométrica confluyente** o **ecuación de Kummer**:

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0. \quad (1.28)$$

El punto $x = 0$ sigue siendo un punto singular regular, de modo que podemos calcular un par de soluciones en forma de serie de Frobenius. La ecuación indicial es:

$$m^2 + (c - 1)m = 0, \quad (1.29)$$

de modo que los exponentes correspondientes al origen son $m_1 = 0$, $m_2 = 1 - c$. Si $c \notin \mathbb{Z}$ dos soluciones independientes son:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.30)$$

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + 1 - c)_n}{(2 - c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.31)$$

Estas dos funciones son hipergeométricas de clase ${}_1F_1$, y la primera de ellas se denomina **función hipergeométrica confluyente de primera especie** o **función de Kummer**. A diferencia de lo que ocurría en el caso de las funciones hipergeométricas de Gauss, estos desarrollos en serie de potencias son válidos para todo $x \in \mathbb{R}$. La notación habitual para estas funciones es la siguiente:

$$M(a; c; x) := {}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.32)$$

Como consecuencia de la linealidad de la ecuación, si $c \notin \mathbb{Z}$ cualquier solución puede escribirse como combinación lineal de las dos dadas:

$$y(x) = C_1 M(a; c; x) + C_2 x^{1-c} M(a + 1 - c; 2 - c; x). \quad (1.33)$$

Una elección cuidadosa de las constantes C_1 y C_2 da lugar a la **función hipergeométrica confluyente de segunda especie**:

$$U(a; c; x) := \frac{\Gamma(1 - c)}{\Gamma(a + 1 - c)} M(a; c; x) + \frac{\Gamma(c - 1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} M(a + 1 - c; 2 - c; x). \quad (1.34)$$

Las funciones $M(a; c; x)$ y $U(a; c; x)$ son independientes siempre y cuando $a \neq 0, -1, -2, \dots$. Además es importante señalar que la función $U(a; c; x)$ está bien definida cuando $c \in \mathbb{Z}$, lo cual se puede ver tomando el correspondiente límite cuando $c \rightarrow m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Al igual que hicimos en el caso de las funciones de Gauss, incluimos aquí algunas propiedades de las funciones hipergeométricas confluentes:

1. La función $M(a; c; x)$ también se puede obtener a partir de la serie de potencias de la función hipergeométrica de Gauss haciendo el límite $b \rightarrow \infty$ término a término, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(b)_n}{b^n} = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.35)$$

2. La función $M(a; c; x)$ es una función analítica en la variable x en todo el plano complejo. Respecto a los parámetros, no está definida si el parámetro c es un entero negativo o si es 0. En ocasiones en lugar de la función de Kummer que hemos definido se utiliza la siguiente:

$$\mathbf{M}(a; c; x) := \frac{1}{\Gamma(c)} M(a; c; x). \quad (1.36)$$

Esta función tiene la importante propiedad de que está bien definida para cualesquiera valores de a , c y x .

3. La función $U(a; c; x)$ está definida para cualesquiera valores de a y c . En la variable x suele presentar una singularidad logarítmica en el origen, que obliga a tomar un corte de rama en el semieje real negativo.
4. Si a es un entero negativo entonces la serie de potencias de la función $M(a; c; x)$ queda truncada y la función se convierte en un polinomio. Por ejemplo, si $a = -m$:

$$M(-m; c; x) = 1 - \frac{m}{c}x + \frac{(-m)_2}{(c)_2} \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-m)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!}. \quad (1.37)$$

Es interesante señalar que si en este caso $c = -n$, con la condición de que $n > m$, entonces la función está bien definida, a pesar de lo expuesto en el apartado anterior.

5. Las sucesivas derivadas de las funciones hipergeométricas confluentes son también funciones de la misma familia, con los parámetros desplazados:

$$\frac{d^n}{dx^n} M(a; c; x) = \frac{(a)_n}{(c)_n} M(a + n; c + n; x), \quad (1.38)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} U(a; c; x) = (-1)^n (a)_n U(a + n; c + n; x). \quad (1.39)$$

6. Si hacemos el cambio $x \rightarrow x/b$ y el límite confluyente $b \rightarrow \infty$ en la primera identidad de Euler (1.13) se obtiene la **identidad de Kummer**:

$$M(a; c; x) = e^x M(c - a; c; -x). \quad (1.40)$$

7. La función de segunda especie satisface una identidad similar:

$$U(a; c; x) = x^{1-c} U(a+1-c; 2-c; x). \quad (1.41)$$

8. Las funciones hipergeométricas confluentes incluyen varios casos importantes de funciones, tanto elementales como especiales:

■ Polinomios de Laguerre [1, 22.5.54] y [83]:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} M(-n; \alpha+1; x) = \frac{(-1)^n}{n!} U(-n; \alpha+1; x). \quad (1.42)$$

■ Polinomios de Hermite [1, 22.5.40, 41, 55]:

$$H_n(x) = 2^n U\left(\frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right), \quad (1.43)$$

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-1/2)}(x^2), \quad (1.44)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(1/2)}(x^2). \quad (1.45)$$

■ Funciones de Whittaker:

$$M_{\kappa, \mu}(x) = e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}+\mu} M\left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu; 1 + 2\mu; x\right), \quad (1.46)$$

$$W_{\kappa, \mu}(x) = e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}+\mu} U\left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu; 1 + 2\mu; x\right). \quad (1.47)$$

Este par de funciones se utiliza a veces en la literatura en lugar de las funciones hipergeométricas confluentes.

■ Funciones de error [1, 7.1.21]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (1.48)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} U\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right). \quad (1.49)$$

■ Funciones gamma incompletas [82]:

$$\gamma(a; x) := \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{x^a}{a} e^{-x} M(1; a+1; x), \quad a > 0, \quad (1.50)$$

$$\Gamma(a; x) := \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = x^a e^{-x} U(1; a+1; x). \quad (1.51)$$

■ Parabolic cylinder functions:

$$U(a; x) = 2^{-3/4-a/2} e^{-x^2/4} x U\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}x^2\right). \quad (1.52)$$

1.1.3. Ecuación hipergeométrica de Bessel

Mediante un proceso similar al que se utiliza para deducir las funciones hipergeométricas confluentes ${}_1F_1(a; c; x)$ a partir de las funciones hipergeométricas de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$, podemos obtener otra función hipergeométrica confluyente de tipo ${}_0F_1(-; c; x)$. Esta función satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$xy''(x) + cy'(x) - y(x) = 0. \quad (1.53)$$

Estas funciones están relacionadas con las funciones de Bessel de primera especie mediante la fórmula:

$${}_0F_1(-; c + 1; -x) = \Gamma(c + 1) x^{-c/2} J_c(2\sqrt{x}). \quad (1.54)$$

Esta conexión nos permitirá obtener propiedades de las funciones de Bessel con las mismas herramientas que utilizamos para las funciones hipergeométricas.

1.2. Ceros reales de funciones hipergeométricas

1.2.1. Teoremas de Sturm

El primer problema que abordamos en este trabajo es el de ciertas propiedades analíticas de los ceros reales de las funciones que son solución de las ecuaciones hipergeométricas de Gauss y Kummer. La herramienta básica que utilizamos es el teorema de comparación de Sturm, un resultado clásico [79] que permite obtener propiedades de los ceros de funciones que son solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. En concreto, las propiedades que vamos a obtener son cotas de distancias entre ceros consecutivos de las funciones hipergeométricas y monotonía de dichas distancias. Este teorema aparece citado en multitud de referencias, la formulación que damos a continuación está tomada de [82, pg.97]:

Teorema 1.2.1 (*Sturm*) Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones de las ecuaciones:

$$y_1''(x) + \tilde{A}_1(x)y_1(x) = 0, \quad y_2''(x) + \tilde{A}_2(x)y_2(x) = 0$$

en un intervalo (a, b) . Supongamos que $\tilde{A}_1(x)$ y $\tilde{A}_2(x)$ son reales y continuas en (a, b) , y que $\tilde{A}_2(x) > \tilde{A}_1(x)$ en (a, b) . Entonces entre dos ceros consecutivos de $y_1(x)$ hay al menos un cero de $y_2(x)$.

Una primera observación sencilla acerca de este resultado es que el teorema de Sturm se enuncia para ecuaciones en forma normal, sin término en derivada primera. Esto no supone una restricción significativa respecto a las ecuaciones de Gauss y Kummer tal y como aparecen en (1.3), (1.28), puesto que es bien sabido que si $y(x)$ es una solución de la ecuación:

$$y''(x) + B(x)y'(x) + A(x)y(x) = 0,$$

entonces la función

$$\tilde{y}(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^x B(t) dt \right\} y(x) \quad (1.55)$$

verifica la ecuación en forma normal

$$\tilde{y}''(x) + \tilde{A}(x)\tilde{y}(x) = 0, \quad (1.56)$$

donde

$$\tilde{A}(x) = A(x) - B'(x)/2 - B^2(x)/4. \quad (1.57)$$

El carácter de las soluciones de la ecuación diferencial (1.56) depende fundamentalmente del signo de la función $\tilde{A}(x)$. Cuando esta función es positiva en un intervalo I las soluciones pueden ser oscilantes en dicho intervalo, en el sentido de que pueden tener dos ceros o más en I . Por otro lado, cuando $\Omega(x)$ es negativa en I las soluciones de la ecuación son monótonas. Más concretamente:

Observación 1.2.1 *Dada una ecuación en forma normal*

$$y''(x) + \tilde{A}(x)y(x) = 0, \quad (1.58)$$

si la función $\tilde{A}(x)$ es continua y negativa en (a, b) entonces la solución correspondiente $y(x)$ no puede tener más de un cero en (a, b) .

Demostración 1.2.1 *Supongamos que $y(x)$ tiene dos ceros en (a, b) , que llamaremos x_1 y x_2 , por el teorema de Rolle la derivada $y'(x)$ debe tener al menos un cero en $I = (x_1, x_2)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y(x)$ es positiva en I , entonces $y''(x) = -\tilde{A}(x)y(x) > 0$ en I , lo cual es una contradicción.*

Cuando $\tilde{A}(x) < 0$ decimos que las soluciones no son oscilantes. A efectos de las propiedades de los ceros estos casos no revisten interés, y por ello supondremos en lo sucesivo que el coeficiente $\tilde{A}(x)$ es positivo. Para ello será necesario imponer ciertas condiciones sobre los parámetros de las funciones hipergeométricas, a las que nos referiremos como **condiciones de oscilación**.

Alternativamente, el teorema de Sturm indica que $y_2(x)$ oscila más rápidamente que $y_1(x)$ cuando $\tilde{A}_2(x) > \tilde{A}_1(x)$ en un cierto intervalo I , en el sentido de que la distancia entre ceros consecutivos de $y_2(x)$ es más pequeña que la correspondiente distancia entre ceros consecutivos de $y_1(x)$. Para ver que esto se sigue del resultado anterior, una posibilidad es la siguiente: supongamos que $\tilde{A}_2(x) > m^2 > \tilde{A}_1(x)$ para una cierta constante positiva m^2 . Comparamos las ecuaciones:

$$y_m''(x) + m^2 y_m(x) = 0, \quad y_2''(x) + \tilde{A}_2(x) y_2(x) = 0.$$

Es claro que una posible solución de la primera ecuación es $y_m(x) = \sin(mx)$, y por tanto la distancia entre ceros consecutivos de $y_m(x)$ es constante e igual a π/m . Sea ahora x_0 un cero de $y_2(x)$, la función $y_m(x) = \sin(m(x - x_0))$ es solución de

la primera ecuación, tiene un cero en x_0 y el siguiente en $x_0 + \pi/m$. Utilizando el teorema anterior, resulta que tiene que haber al menos un cero de $y_2(x)$ en el intervalo $(x_0, x_0 + \pi/m)$, puesto que $\tilde{A}_2(x) > m^2$, y la distancia entre ceros consecutivos de $y_2(x)$ es por tanto menor que π/m . Con un argumento análogo probamos que la distancia entre ceros consecutivos de $y_1(x)$ es mayor que π/m , de manera que efectivamente la distancia entre ceros consecutivos de $y_2(x)$ es menor que la distancia entre ceros consecutivos de $y_1(x)$.

Como consecuencia, cuando podamos acotar superior o inferiormente la función $\Omega(x)$ (por medio de un máximo o mínimo local, por ejemplo), tendremos una cota inferior o superior de la distancia entre ceros consecutivos de $y(x)$. Más concretamente, el resultado principal [11] es el siguiente:

Teorema 1.2.2 (Sturm) *Sea una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden escrita en forma normal:*

$$y''(x) + \tilde{A}(x)y(x) = 0, \quad (1.59)$$

donde $\tilde{A}(z)$ es continua en un intervalo $I = (a, b)$. Sea $y(x)$ una solución no trivial de dicha ecuación diferencial en (a, b) , y sean x_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ los ceros de $y(x)$ en I en orden creciente. Definimos $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$ y $\Delta^2 x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$.

- Si existe $\tilde{A}_M > 0$ tal que $\tilde{A}(x) < \tilde{A}_M$ en (a, b) entonces $\Delta x_k > \pi/\sqrt{\tilde{A}_M}$.
- Si existe $\tilde{A}_m > 0$ tal que $\tilde{A}(x) > \tilde{A}_m$ en (a, b) entonces $\Delta x_k < \pi/\sqrt{\tilde{A}_m}$.
- Si $\tilde{A}(x)$ es estrictamente creciente en (a, b) cuando es positiva entonces $\Delta^2 x_k < 0$.
- Si $\tilde{A}(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b) cuando es positiva entonces $\Delta^2 x_k > 0$.

Observación 1.2.2 *Es habitual referirse al tercer y cuarto resultado de este teorema como teorema de convexidad de Sturm. Teniendo en cuenta que $\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$, podemos reescribir los dos últimos apartados de la siguiente forma:*

- Si $\tilde{A}(x)$ es estrictamente creciente en (a, b) entonces: $\Delta x_{k+1} < \Delta x_k$, es decir, la distancia entre ceros consecutivos disminuye cuando x crece.
- Si $\tilde{A}(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b) entonces: $\Delta x_{k+1} > \Delta x_k$, es decir, la distancia entre ceros consecutivos aumenta cuando x crece.

Claramente, el problema principal para obtener propiedades de tipo Sturm de los ceros de una cierta función es determinar la existencia de máximos o mínimos de la función $\tilde{A}(x)$ en el intervalo de estudio, es decir, resolver la ecuación $\tilde{A}'(x) = 0$. Teniendo en cuenta la cantidad de parámetros involucrados en el caso de las ecuaciones de Gauss y Kummer, los resultados obtenidos van a depender de los valores

que tomen estos parámetros, y cambiarán de una región a otra.

En la siguiente sección veremos ciertas transformaciones de la ecuación diferencial que se pueden utilizar en combinación con los teoremas de Sturm para analizar las propiedades de los ceros de las funciones hipergeométricas.

1.2.2. Transformaciones de Liouville-Green

Estas transformaciones (también llamadas transformaciones de Liouville) son importantes en varios aspectos de la teoría de ecuaciones diferenciales, véase [68], y consisten en un cambio de variable independiente $z = z(x)$, suficientemente regular, seguido de una transformación a forma normal en la nueva variable. La función $Y(z)$, donde:

$$Y(z(x)) = \sqrt{z'(x)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^x B(t) dt \right\} y(x) \quad (1.60)$$

satisface:

$$\ddot{Y}(z) + \Omega(z)Y(z) = 0, \quad (1.61)$$

donde los puntos indican derivadas respecto a la variable z y el coeficiente $\Omega(z)$ es:

$$\Omega(z) = \tilde{A}(x(z)) \dot{x}(z)^2 + \frac{\ddot{x}(z)}{2\dot{x}(z)} - \frac{3\ddot{x}(z)^2}{4\dot{x}(z)^2} = \tilde{A}(x(z)) \dot{x}(z)^2 + \frac{1}{2}\{x, z\}, \quad (1.62)$$

donde $\{z, x\}$ es la derivada schwarziana de z respecto a x , y el coeficiente $\tilde{A}(x)$ viene dado por (1.57). Esta transformación de la ecuación diferencial se denomina **transformación de Liouville-Green**.

Cuando se utiliza un cambio de variable $z = z(x)$, el problema que hay que resolver para obtener las propiedades de tipo Sturm es $\dot{\Omega}(z) = 0$. De esta manera se obtienen resultados en la variable z , que podremos traducir a la variable original x si el cambio de variable $z = z(x)$ es invertible analíticamente. En las familias de cambios de variable que veremos, los casos más interesantes y sencillos de manejar serán aquellos en los que se cumpla esta condición.

Además, si $z'(x) > 0$ el análisis de las propiedades de monotonía de $\Omega(z)$ en la variable z es equivalente al estudio de dichas propiedades en x , como resultado de una aplicación inmediata de la regla de la cadena. Haremos uso de esta observación en lo sucesivo, puesto que en la mayoría de los casos simplifica los cálculos. En términos de la variable x la función $\Omega(z(x))$ es:

$$\Omega(z(x)) = \frac{1}{z'(x)^2} \left(\tilde{A}(x) - \frac{z'''(x)}{2z'(x)} + \frac{3z''(x)^2}{4z'(x)^2} \right) = \frac{1}{z'(x)^2} \left(\tilde{A}(x) - \frac{1}{2}\{z, x\} \right). \quad (1.63)$$

Con el fin de simplificar la notación, a la hora de estudiar esta función normalmente omitiremos la variable z y escribiremos directamente $\Omega(x)$.

1.2.3. Ejemplos

En la literatura sobre los ceros reales de las funciones hipergeométricas aparecen varias transformaciones estándar de las ecuaciones diferenciales, con ciertos cambios de variable asociados. Por ejemplo, los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $x \in (-1, 1)$, que son un caso particular de las funciones de Gauss (1.22):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; \frac{1 - x}{2} \right)$$

En este caso el cambio clásico es $x = \cos \theta$, que conduce a los resultados expuestos en [80] cuando los parámetros satisfacen $|\alpha| < 1/2$ y $|\beta| < 1/2$: la función

$$u(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \quad (1.64)$$

satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + \Omega(\theta)u(\theta) = 0, \quad (1.65)$$

donde

$$\Omega(\theta) = \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 + \frac{1/4 - \alpha^2}{4 \sin^2(\theta/2)} + \frac{1/4 - \beta^2}{4 \cos^2(\theta/2)}. \quad (1.66)$$

En este caso es inmediato ver que cuando $|\alpha|, |\beta| < 1/2$ la función $A(\theta)$ satisface:

$$\Omega(\theta) > \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 =: \Omega_m. \quad (1.67)$$

A partir de esto se obtiene una cota sencilla para la distancia entre ceros consecutivos de los polinomios de Jacobi en la variable θ , y además dicha cota es global en el sentido de que es válida para todos los ceros de los polinomios de Jacobi, una vez fijados los valores de α y β , e independientemente del grado del polinomio n (aunque el valor de la cota dependa de este parámetro).

Por otro lado, si consideramos el cambio trivial $z(x) = x$ entonces:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1}{x(1-x)} + \frac{1 - \alpha^2}{x^2} + \frac{1 - \beta^2}{(1-x)^2} \right], \quad (1.68)$$

donde $L = 2n + \alpha + \beta + 1$. La derivada tiene la forma:

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4x^3(1-x)^3} P(x), \quad (1.69)$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado 3 que depende de los parámetros n , α y β . En este caso el análisis es complicado, y además la información que se obtiene no

es global para todos los ceros. Para más detalles remitimos al lector a la referencia [12], y para resultados relacionados a [2].

Otro ejemplo clásico viene dado por los polinomios de Hermite. La función $y(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ satisface la ecuación [1, 22.6]:

$$y''(x) + (2n + 1 - x^2)y(x) = 0. \quad (1.70)$$

Con el cambio de variable propuesto en [80, pg.130], $x = (2n + 1)^{-1/2} \xi$, la ecuación pasa a ser:

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{\xi^2}{(2n + 1)^2}\right) y(\xi) = 0. \quad (1.71)$$

Claramente $\Omega(\xi) < 1$, lo cual da una cota inferior sencilla para la distancia entre ceros consecutivos de los polinomios de Hermite. Teniendo en cuenta las relaciones (1.44) y (1.45), estos resultados se aplican a la diferencia entre cuadrados de ceros consecutivos de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Por otro lado, es claro que si $\xi > 2n + 1$, o equivalentemente, si $x > \sqrt{2n + 1}$, entonces $\Omega(\xi) < 0$, y no puede haber más que a lo sumo un cero de $H_n(x)$ mayor que ese valor. De hecho, esta es una primera estimación para el cero más grande de esta familia de polinomios, véase [80, pg.132].

Por último, otro ejemplo conocido viene dado por las funciones de Bessel $y(x) = \sqrt{x} J_\nu(x)$, que tienen infinitos ceros reales cuando $x > 0$ y el orden ν es real [88]. La ecuación diferencial correspondiente es:

$$y''(x) + \left(1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0. \quad (1.72)$$

A partir de esta ecuación se deducen sin dificultad propiedades conocidas de los ceros reales de las funciones de Bessel, véanse por ejemplo las referencias [22, 88].

1.2.4. Cambios de variable admisibles

Teniendo en cuenta los ejemplos que hemos considerado, especialmente el caso de los polinomios de Jacobi, cabe preguntarse por qué algunos cambios de variable proporcionan propiedades de manera directa y otros no. Siguiendo lo expuesto en [11, 12], parece claro que es necesario imponer ciertas condiciones sobre los cambios de variable $z = z(x)$, con el fin de poder obtener propiedades de tipo Sturm acerca de los ceros de manera sencilla y sistemática. En nuestro caso impondremos la condición de que resolver el problema $\Omega'(x) = 0$, que nos da los extremos y las propiedades de monotonía de la función $\Omega(x)$, sea equivalente a resolver una ecuación a lo más cuadrática en x . En estas condiciones:

- El problema es tratable analíticamente sin excesiva complicación, lo cual es importante teniendo en cuenta el número de parámetros involucrados.

- Esta restricción limita a dos el número de posibles extremos de la función $\Omega(x)$. La existencia de a lo sumo dos extremos generalmente permite obtener propiedades que se aplican a todos los ceros reales en el intervalo de estudio correspondiente. La presencia de dos máximos (o dos mínimos) locales donde $\Omega(x)$ es positiva da dos cotas diferentes sobre los ceros, una de las cuales no se cumple de manera global. En nuestro estudio no nos ocuparemos de este tipo de resultados.

Más adelante veremos que estas restricciones conducen a familias de cambios de variable bastante generales para las ecuaciones de Gauss y Kummer, que incluyen como casos particulares los ejemplos que hemos descrito anteriormente. Este planteamiento también permitirá generalizar algunos resultados presentes en la literatura, ampliando los rangos de parámetros donde son aplicables o dando expresiones más generales en función de la transformación de Liouville-Green que consideremos.

1.3. Relaciones de recurrencia a tres términos

Entre las diferentes identidades funcionales que satisfacen las funciones hipergeométricas clásicas, como por ejemplo (1.13), (1.14), (1.16), (1.17), (1.40), (1.41), las relaciones de recurrencia a tres términos que satisfacen las funciones hipergeométricas de una misma familia con parámetros desplazados son especialmente importantes tanto desde el punto de vista analítico como numérico. Una parte sustancial de este trabajo está dedicado al análisis de estas relaciones de recurrencia, especialmente desde una perspectiva computacional.

Dada una función hipergeométrica de Gauss:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right)$$

se definen las funciones **contiguas** como aquellas en las que uno de los parámetros difiere en una unidad y los otros dos son iguales, es decir:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a \pm 1, b \\ c \end{matrix} ; x \right), \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \pm 1 \\ c \end{matrix} ; x \right), \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \pm 1 \end{matrix} ; x \right)$$

Con más generalidad, se suele entender como función contigua de una dada cualquiera cuyos parámetros difieren en un número entero respecto a los de la función original. Una propiedad importante de las funciones de Gauss es que tres funciones contiguas cualesquiera verifican una relación de recurrencia a tres términos con coeficientes racionales en a , b , c y x . Cuando la diferencia entre los parámetros es una unidad, las 15 identidades originales de Gauss [25] muestran explícitamente esta estructura, y es claro que el proceso puede iterarse cuando la diferencia en los parámetros es mayor que 1, sin alterar la forma de los coeficientes. Véase por ejemplo [87]. En la página

<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~vidunas/>

puede encontrarse un programa Maple para calcular los coeficientes de dicha expresión de manera automática una vez indicadas las tres funciones hipergeométricas que queremos relacionar.

De la misma forma que en el caso de las funciones de Gauss, dada una función hipergeométrica confluyente $\phi(a; c; x)$, donde $\phi(a; c; x)$ es $M(a; c; x)$ o $U(a; c; x)$, las funciones contiguas de una dada son aquellas tales que los parámetros difieren en una unidad. Por ejemplo, $\phi(a \pm 1; c; x)$ y $\phi(a; c \pm 1; x)$ respecto a $\phi(a; c; x)$. Al igual que ocurre con las funciones de Gauss, tres funciones hipergeométricas confluentes contiguas cualesquiera verifican una relación de recurrencia a tres términos con coeficientes racionales en a , c y x . Además, con normalizaciones convenientes, las funciones $M(a; c; x)$ y $U(a; c; x)$ verifican la misma relación de recurrencia.

En este trabajo vamos a considerar relaciones de recurrencia a tres términos con la siguiente notación:

$$y_{n+1}(x) + b_n(x)y_n(x) + a_n(x)y_{n-1}(x) = 0, \quad (1.73)$$

donde n es un parámetro entero del que pueden depender uno o varios parámetros de la función. El hecho de que la dependencia respecto a n pueda darse en distintos parámetros da lugar a diferentes recurrencias (1.73). Por ejemplo, podemos trabajar con las funciones:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b \\ c \end{matrix} ; x \right), & y_n(x) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ c \end{matrix} ; x \right) \\ y_n(x) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix} ; x \right), & y_n(x) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c+n \end{matrix} ; x \right). \end{aligned}$$

Hablaremos de *direcciones de recurrencia* para indicar qué parámetros varían con n : así nos referiremos a los ejemplos anteriores como recurrencia $(+00)$, recurrencia $(++0)$, recurrencia $(+++)$ y recurrencia $(00+)$ respectivamente. Teniendo en cuenta las identidades de Gauss descritas al principio de esta memoria (1.13)–(1.15), es claro que no todas las direcciones son independientes, véase [35] para un análisis detallado de los casos fundamentales.

Las relaciones de recurrencia a tres términos constituyen una parte fundamental de la teoría de ciertas familias de funciones especiales, como los polinomios ortogonales clásicos [9, 80], donde la relación de recurrencia es una consecuencia inmediata de las condiciones de ortogonalidad, o las funciones de Bessel [88]. Para las funciones hipergeométricas de Gauss y confluentes en general, estas identidades se pueden encontrar en multitud de referencias, por ejemplo [1, 5, 25, 58, 82].

1.3.1. Aspectos numéricos

Desde un punto de vista computacional las relaciones de recurrencia a tres términos tienen una utilidad inmediata: a partir de dos valores iniciales $f_0(x)$ y $f_1(x)$ podemos calcular la función $f_n(x)$ para diferentes valores de los parámetros, moviéndonos en una cierta dirección de recurrencia. Esta cuestión enlaza directamente con el problema general de la evaluación numérica de funciones hipergeométricas, tema amplio de investigación que aquí sólo tocamos de manera indirecta. Véase por ejemplo la referencia [57], donde se citan algoritmos más o menos completos, dependiendo de las diferentes familias de funciones. Para algunas de ellas el problema está ampliamente estudiado, como las funciones de Bessel, otras han sido objeto de estudio reciente [37, 38], y para las familias más generales (hipergeométricas confluentes y Gauss) las referencias parecen ser escasas [65, 26, 83]. En este último artículo las relaciones de recurrencia son la herramienta fundamental que se propone para la evaluación de la función hipergeométrica confluyente $U(a; c; x)$. Asimismo se comentan aspectos y dificultades de tipo numérico que enlazan con problemas que presentaremos más adelante.

A la hora de utilizar las relaciones de recurrencia con fines computacionales hay dos aspectos básicos que conviene tener en cuenta: en primer lugar, la eficiencia del cálculo de dichos valores iniciales $f_0(x)$ y $f_1(x)$, más el uso de la relación de recurrencia, frente a un método directo de evaluación de la función (series de potencias, representaciones integrales, etc...). Por otro lado, el control del comportamiento numérico de estas relaciones de recurrencia (1.73). Como se puede ver en las referencias clásicas [31, 89], las propiedades numéricas están vinculadas a la existencia de soluciones mínimas de la relación de recurrencia.

Definición 1.3.1 *Dada una recurrencia (1.73), se dice que una solución $f_n(x)$ es **mínima** (o **recesiva**) en dicha dirección de recurrencia si se cumple que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = 0, \quad (1.74)$$

siendo $g_n(x)$ una solución de (1.73) independiente de $f_n(x)$.

Diremos que $g_n(x)$ es una solución **dominante**. Esta denominación obedece al hecho de que $g_n(x)$ determina de manera esencial el comportamiento de cualquier solución de la recurrencia, salvo la mínima y múltiplos constantes de ésta, cuando n es grande. En efecto, sea $y_n(x)$ una solución general de (1.73), independiente de $f_n(x)$, entonces podemos escribir:

$$y_n(x) = Af_n(x) + Bg_n(x), \quad (1.75)$$

para ciertas constantes $A, B \neq 0$, puesto que $f_n(x)$ y $g_n(x)$ son independientes. Cuando n es grande:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n(x)}{g_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Af_n(x) + Bg_n(x)}{g_n(x)} = B, \quad (1.76)$$

de modo que la solución $g_n(x)$ determina el comportamiento de cualquier solución cuando $B \neq 0$. Como consecuencia de ello, es importante observar que la solución mínima es única salvo constante multiplicativa, puesto que dada $y_n(x)$ como antes, si $B \neq 0$ entonces se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{y_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{Af_n(x) + Bg_n(x)} = 0, \quad (1.77)$$

de modo que $y_n(x)$ es también dominante.

Podemos calcular una solución mínima de (1.73) utilizando la recurrencia siempre que $B = 0$, lo que anula el término dominante. Sin embargo, desde el punto de vista numérico es inevitable que se introduzca una componente dominante en la solución que calculamos, y este término, aunque pequeño en origen, acaba determinando el comportamiento de $y_n(x)$. Por ello, el cálculo de una solución mínima mediante la recurrencia es un problema mal condicionado, y consecuentemente la evaluación es numéricamente inestable [31]. En efecto, el correspondiente error relativo de $y_n(x)$ frente a la solución mínima es:

$$|E| = \left| 1 - \frac{y_n(x)}{Af_n(x)} \right| = \left| 1 - \frac{Af_n(x) + Bg_n(x)}{Af_n(x)} \right| = \left| \frac{B}{A} \right| \left| \frac{g_n(x)}{f_n(x)} \right| \rightarrow \infty. \quad (1.78)$$

Por otro lado, el cálculo de una solución dominante por este método funciona bien numéricamente.

Debido a esta situación, para considerar resuelta numéricamente una recurrencia que admite una solución mínima no basta con dar dos soluciones independientes, sino que es necesario además disponer de dicha solución mínima. Una solución mínima y una dominante en una cierta dirección forman un **par numéricamente satisfactorio**, y a partir de él se puede calcular cualquier otra solución de la recurrencia de manera numéricamente estable. Por el contrario, calcular la solución mínima a partir de un par de soluciones dominantes (aunque sean independientes) conduce a errores debidos a cancelación.

A modo de ejemplo sencillo vamos a considerar la recurrencia de las funciones de Bessel modificadas, $K_\nu(x)$ e $e^{i\pi\nu}I_\nu(x)$ (también es posible tomar $(-1)^{[\nu]}I_\nu(x)$), véase [1]. Estas funciones satisfacen la siguiente recurrencia [1, 9.6.26]:

$$y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x}y_\nu(x) - y_{\nu-1}(x) = 0. \quad (1.79)$$

Esta recurrencia tiene una solución mínima cuando $\nu \rightarrow \infty$, lo cual se puede comprobar a partir de la siguiente información asintótica [68, págs. 252 y 374]:

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad K_\nu(x) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \quad (1.80)$$

Es claro que $I_\nu(x)$ es mínima cuando $\nu \rightarrow \infty$. Consideramos la siguiente prueba numérica: tomamos como valor inicial del parámetro $\nu_0 = 1,4$, y $x = 31,1$. Calculamos los valores iniciales $K_{\nu_0}(x)$, $K_{\nu_0+1}(x)$, $(-1)^{[\nu_0]}I_{\nu_0}(x)$ e $(-1)^{[\nu_0+1]}I_{\nu_0+1}(x)$ en Maple con 30 dígitos e iteramos la recurrencia (1.79) en Fortran utilizando precisión doble (16 dígitos). En la figura 1.1 mostramos el error relativo (en escala logarítmica) entre el resultado de la recurrencia en Fortran y el valor calculado con Maple:

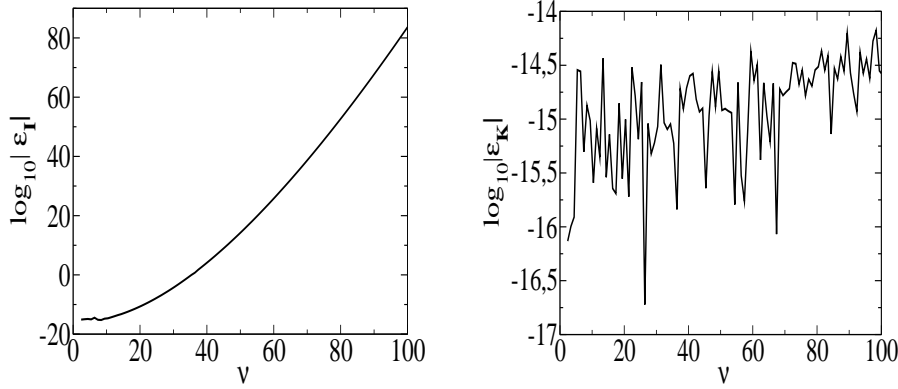


Figura 1.1: Gráfica del error en el cálculo de las funciones de Bessel modificadas utilizando recurrencias, $\nu_0 = 1,4$. A la izquierda la solución mínima $e^{i\pi\nu}I_\nu(x)$, el error crece de manera incontrolada rápidamente. A la derecha la solución dominante $K_\nu(x)$, el error se mantiene cercano a la precisión doble estándar ($\epsilon \approx 10^{-16}$).

Como puede verse, el cálculo numérico de la solución mínima es incorrecto al cabo de muy pocas iteraciones, mientras que en el caso de la solución dominante el error se mantiene cerca del ϵ máquina ($\approx 10^{-16}$). Este es el comportamiento esperable, según la teoría expuesta.

Este ejemplo indica que para utilizar las relaciones de recurrencia y las fracciones continuas asociadas en el cálculo numérico de funciones hipergeométricas es necesario determinar si la recurrencia en cuestión admite una solución mínima en la dirección en la que queremos efectuar el cálculo, y si es el caso identificarla. Esto se puede llevar a cabo utilizando teoremas clásicos, como el de Perron. Este teorema, que enunciaremos adecuadamente más adelante, relaciona las soluciones de una recurrencia (1.73), para la que se cumple que $a_n \sim an^\alpha$ y $b_n \sim bn^\beta$ cuando $n \rightarrow \infty$, con las raíces del polinomio característico $\phi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a$.

El trabajo de investigación que planteamos en este tema parte de la observación de que toda la información que hemos manejado hasta ahora, tanto de la recurrencia (Perron) como de las soluciones, es de tipo asintótico, correspondiente a valores grandes de un cierto parámetro. Cabe preguntarse si esta información es suficiente para utilizar (1.73) numéricamente de manera segura cuando el valor de dicho parámetro es moderado. En la gráfica 1.2 se muestra el mismo ejemplo de las fun-

ciones de Bessel modificadas, pero esta vez tomando como valor inicial $\nu_0 = -31,4$.

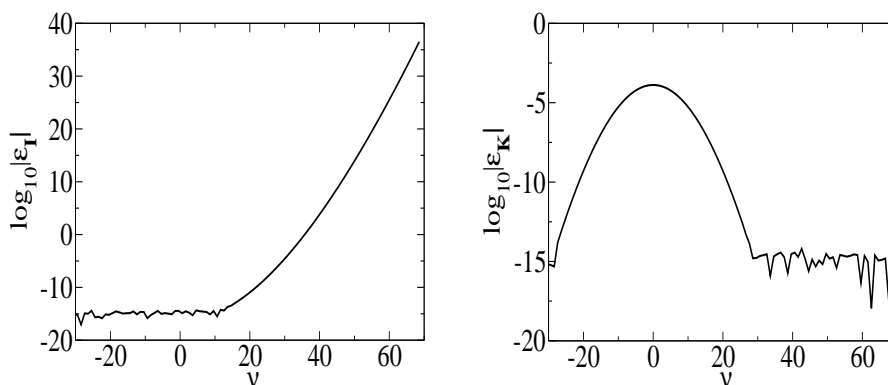


Figura 1.2: Gráfica del error en el cálculo de las funciones de Bessel modificadas utilizando recurrencias, $\nu_0 = -31,4$. A la izquierda la solución mínima $e^{i\pi\nu} I_\nu(x)$, el error debería crecer como antes pero se mantiene pequeño al principio. A la derecha la solución dominante $K_\nu(x)$, el error crece inesperadamente al principio y luego vuelve a valores normales.

En este caso, la solución mínima se calcula adecuadamente para un rango considerable de valores de ν (hasta $\nu = 10$, por ejemplo), y después el error crece igual que ocurría en el caso $\nu_0 = 1,4$. Por otro lado, el error de la solución dominante crece de manera inesperada al principio y luego vuelve a valores normales. En otras palabras, hay una inversión de papeles entre la solución mínima y la dominante en las primeras iteraciones de la recurrencia, puesto que la primera se calcula bien y la segunda mal. Por supuesto, el comportamiento final de las soluciones, cuando ν es suficientemente grande, es el mismo en ambos ejemplos, y es el que determinan el teorema de Perron y la información asintótica, pero desde el punto de vista de computación es fundamental conocer la existencia de esta zona transitoria.

Más adelante consideraremos con más detalle el problema de las soluciones de las recurrencias que, aun siendo dominantes, se comportan inicialmente como mínimas. Es el caso de la función $K_\nu(x)$ en el ejemplo anterior. Nos referiremos a estas soluciones como **transitoriamente mínimas**, y veremos que aparecen no solamente en el caso de las funciones de Bessel modificadas, sino también en otros ejemplos de funciones hipergeométricas de Gauss y Kummer.

1.3.2. Fracciones continuas asociadas

A partir de la relación de recurrencia (1.73) podemos escribir la siguiente recurrencia para los cocientes, siempre que $y_{n-1}(x), y_n(x) \neq 0$:

$$\frac{y_n(x)}{y_{n-1}(x)} = \frac{-a_n(x)}{b_n(x) + \frac{y_{n+1}(x)}{y_n(x)}}. \quad (1.81)$$

Es claro que si las soluciones $y_{n-1}(x)$, $y_n(x)$, \dots no se anulan, entonces podemos iterar este proceso y obtener una expresión en forma de fracción continua:

$$\frac{y_n(x)}{y_{n-1}(x)} = \frac{-a_n(x)}{b_n(x)+} \frac{-a_{n+1}(x)}{b_{n+1}(x)+} \cdots \frac{-a_{n+m-1}(x)}{b_{n+m-1}(x)+} \frac{y_{n+m}(x)}{y_{n+m-1}(x)}. \quad (1.82)$$

En cada dirección de recurrencia tendremos una fracción continua diferente para un cociente distinto. Una cuestión natural que surge es la convergencia de dicha fracción continua cuando $m \rightarrow \infty$, y en caso de convergencia qué cociente de soluciones aproxima. La respuesta viene dada por el teorema de Pincherle [31, 48, 56], que asegura que la fracción continua asociada a una recurrencia converge si y solamente si dicha recurrencia admite una solución mínima, y que en ese caso la fracción continua converge precisamente al cociente de valores consecutivos de dicha solución mínima.

Sin embargo, la presencia de soluciones pseudomínimas también afecta a las fracciones continuas asociadas a las recurrencias. Teniendo en cuenta que lo que ocurre es que una solución dominante se comporta temporalmente como si fuese mínima, cabría esperar que la fracción continua aproximase primero un cociente de soluciones dominantes y después el cociente correcto de soluciones mínimas que establece el teorema de Pincherle.

De hecho eso es lo que ocurre, como vemos en el mismo ejemplo de las funciones de Bessel modificadas. La fracción continua asociada es:

$$H_\nu(x) := \frac{-x}{2\nu+} \frac{x^2}{2(\nu+1)+} \frac{x^2}{2(\nu+2)+} \cdots \quad (1.83)$$

Tomando $\nu_0 = -31,4$ y $x = 31,1$, la figura 1.3 ilustra lo que ocurre.

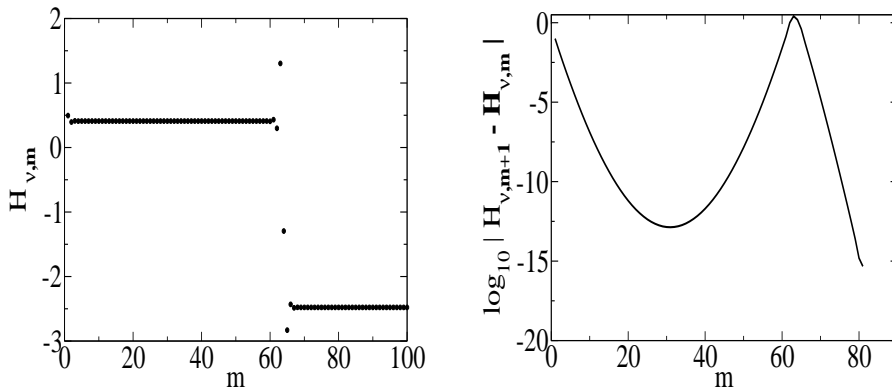


Figura 1.3: A la izquierda, aproximantes sucesivos de la fracción continua (1.83). A la derecha, diferencia entre aproximantes consecutivos de la misma fracción continua. Valores de los parámetros: $\nu_0 = -31,4$, $x = 31,1$.

Como puede verse, la fracción continua aproxima un primer cociente, que corresponde a soluciones dominantes, con una precisión que puede ser bastante alta (si consideramos un valor negativo más grande de ν_0 podemos aumentar la precisión que se alcanza en la primera región). Después el cociente que se calcula es el de soluciones mínimas. En estos casos hablaremos de **pseudoconvergencia** de la fracción continua (W. Gautschi se refiere a esta situación con el nombre de convergencia anómala en [32]).

Desde el punto de vista computacional veremos que es fundamental controlar este tipo de fenómenos, puesto que pueden suponer pérdida de precisión en el cálculo del cociente de soluciones mínimas e incluso que se evalúe un cociente distinto del deseado. Este problema aparecerá de nuevo en conexión con el algoritmo de cálculo de ceros de funciones hipergeométricas que se presenta al final de este trabajo.

1.4. Métodos de cálculo de ceros reales de funciones hipergeométricas

Finalmente, en este trabajo tratamos el cálculo numérico de los ceros reales de las funciones hipergeométricas, un problema de interés tanto matemático como desde el punto de vista de las aplicaciones. Por ejemplo, los ceros de los polinomios ortogonales de Jacobi, Laguerre y Hermite son los nodos de las correspondientes reglas de cuadratura gaussiana, que se utilizan frecuentemente en problemas de integración numérica y ecuaciones diferenciales.

Algunos métodos propuestos en la literatura son, de manera esquemática:

- Métodos de tipo Newton o bisección.
- Estimaciones asintóticas, que se pueden combinar con lo anterior.
- Métodos matriciales, basados en el cálculo de autovalores de una matriz.
- Métodos de punto fijo, basados en sistemas de ecuaciones difero-diferenciales que relacionan funciones hipergeométricas contiguas de una misma familia con sus derivadas.

El principal problema que suelen presentar los algoritmos de cálculo de ceros es la falta de generalidad, puesto que las propiedades y la información disponible sobre los ceros pueden cambiar considerablemente de una familia a otra.

En este trabajo haremos especial hincapié en los métodos de punto fijo, expuestos en [40, 41] y utilizados en [14] en el caso particular de la función hipergeométrica confluyente $M(a; c; x)$. Estos métodos presentan la ventaja de ser aplicables a todas las funciones hipergeométricas tratadas en este trabajo, puesto que parten de identidades comunes a todas ellas. En el último capítulo de esta memoria veremos tanto las

propiedades numéricas de estos métodos como la implementación concreta en un paquete de rutinas Maple para el cálculo de ceros reales de funciones hipergeométricas.

El punto de partida es el siguiente: consideramos dos ecuaciones diferenciales del mismo tipo en forma normal:

$$y''(x) + \tilde{A}_y(x)y(x) = 0, \quad w''(x) + \tilde{A}_w(x)w(x) = 0. \quad (1.84)$$

Diremos que $w(x)$ es una **función de contraste** respecto a $y(x)$. Como se explica en [40] y [75], y a partir de un resultado que aparece en [60] y [61], dados dos conjuntos de soluciones de las ecuaciones anteriores, $\{y^{(1)}(x), y^{(2)}(x)\}$ y $\{w^{(1)}(x), w^{(2)}(x)\}$ respectivamente, existe un único sistema de ecuaciones difero-diferenciales (DDE) de la forma (1.85):

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)y(x) + d(x)w(x) \\ w'(x) &= b(x)w(x) + e(x)y(x) \end{aligned} \quad (1.85)$$

que satisfacen tanto el par $\{y^{(1)}(x), w^{(1)}(x)\}$ como $\{y^{(2)}(x), w^{(2)}(x)\}$.

Es claro que podemos elegir una función hipergeométrica $y(x)$ y como función de contraste $w(x)$ una función contigua. Por ejemplo, en el caso de las funciones hipergeométricas confluentes, si $y(x) = M(a, c; x)$ y $w(x) = M(a - 1; c; x)$ entonces el sistema correspondiente es [34]:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{a - c + x}{x} y(x) - \frac{a - c}{x} w(x) \\ w'(x) &= \frac{1 - a}{x} w(x) + \frac{a - 1}{x} y(x) \end{aligned} \quad (1.86)$$

Bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes del sistema (1.85) se pueden obtener resultados de entrelazado de ceros para las funciones $y(x)$ y $w(x)$. Más concretamente, citamos aquí [75, Lema 2.4.]:

Lema 1.4.1 *Sean $y(x)$ y $w(x)$ dos soluciones no triviales de (1.85) en un intervalo I , y sea $d(x)$ continua en I . Si $y(x)$ o $w(x)$ tienen al menos dos ceros en I entonces:*

- *Los ceros de $y(x)$ y $w(x)$ son simples.*
- *Las funciones $y(x)$ y $w(x)$ no tienen ceros comunes.*
- *Los ceros de $y(x)$ y $w(x)$ están entrelazados.*
- *Se cumple que $d(x)e(x) < 0$ en I .*

Este lema tiene importantes consecuencias tanto en lo referente a información analítica acerca de los ceros como en la construcción del método de punto fijo para el cálculo numérico de los mismos.

Por un lado, la condición de que $d(x)e(x) < 0$ cuando las soluciones oscilan proporciona una manera sencilla de determinar condiciones sobre los parámetros de manera que la función correspondiente tenga al menos dos ceros en un cierto intervalo en la variable x . En este sentido, en [34] se analizan diferentes sistemas de DDEs para funciones de Gauss, Kummer y Bessel, con el requisito de que los coeficientes del sistema deben ser funciones continuas en x en el intervalo de estudio correspondiente, salvo en los puntos singulares de la ecuación diferencial. El resultado son las llamadas **condiciones de oscilación**, que utilizaremos en el siguiente capítulo para estudiar propiedades de tipo Sturm de los ceros.

Por otro lado, si consideramos el siguiente cambio de variable

$$z(x) = \int^x \sqrt{-d(t)e(t)} dt, \quad (1.87)$$

además de ciertas normalizaciones adecuadas, podemos obtener dos funciones $\tilde{y}(z)$ y $\tilde{w}(z)$, que satisfacen un sistema análogo en una nueva variable z :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}}(z) \\ \dot{\tilde{w}}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta(z) & 1 \\ 1 & \eta(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}(z) \\ \tilde{w}(z) \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

En este sistema $\tilde{b}(z) = -\tilde{a}(z) = \eta(z)$, donde:

$$\eta(z) := \frac{b(z) - a(z)}{2} \dot{x}(z) + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \log \left| \frac{d(z)}{e(z)} \right| \quad (1.89)$$

En estas condiciones, el cociente:

$$H(z) := \text{sign}(d) \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{w}(z)} \quad (1.90)$$

presenta ceros y polos entrelazados, como consecuencia del lema anterior sobre el entrelazado de ceros, y es claro que los ceros de $H(z)$ son los mismos que los de la función $\tilde{y}(z)$, lo cuales a su vez son, salvo por el cambio de variable, los de la función $y(x)$.

La iteración de punto fijo:

$$T(z) = z - \arctan(H(z)) \quad (1.91)$$

permite calcular los ceros de la función $H(z)$ con buenas propiedades numéricas, véanse [40, 41, 75] para más detalles.

Una cuestión fundamental en este algoritmo es el cálculo numérico de dichos cocientes. Como las funciones $H(z)$ son cocientes de funciones hipergeométricas, admiten desarrollos en forma de fracción continua, como hemos visto anteriormente. A la hora de abordar el problema de la evaluación numérica de estos cocientes será necesario estudiar la convergencia de estas fracciones continuas, así como posibles fenómenos de pseudoconvergencia que puedan alterar el comportamiento numérico de estas fracciones continuas para ciertos rangos de parámetros.

Capítulo 2

Ceros reales de funciones hipergeométricas. Propiedades de tipo Sturm

2.1. Preliminares y antecedentes

En este capítulo exponemos propiedades de tipo Sturm de los ceros reales de las funciones hipergeométricas clásicas. Esta información se obtiene mediante la aplicación de dos herramientas analíticas: las transformaciones de Liouville-Green (LG) de las ecuaciones diferenciales de Gauss y Kummer y los teoremas de comparación de Sturm, que hemos explicado brevemente en el capítulo anterior.

Las propiedades de los ceros de las funciones hipergeométricas clásicas aparecen analizadas en numerosos trabajos, aquí citamos algunos sin pretensión de ser exhaustivos. En [50] se encuentra un análisis de existencia y número de ceros reales en el caso hipergeométrico general ${}_pF_q$. En [72] se puede ver un estudio del número de ceros (complejos) de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$, y en la referencia [25] se estudia el número y distribución de ceros (complejos) de las funciones hipergeométricas confluentes $M(a; c; x)$ y $U(a; c; x)$, a partir de ideas expuestas en [86] y otros. En el campo de los polinomios de tipo hipergeométrico se pueden encontrar resultados interesantes acerca del comportamiento de los ceros dependiendo de los parámetros de la función en [18, 19]. En el caso de los polinomios ortogonales clásicos (Jacobi, Laguerre y Hermite) las referencias son abundantes, comenzando por el clásico [80]. La mayor parte de los resultados en el caso hipergeométrico hacen referencia a la distribución de los ceros dependiendo de los parámetros de la función, o a estimaciones asintóticas de los ceros, generalmente por medio de otras funciones especiales, [28, 29, 64]. Véase también [22, 53] para resultados de este tipo y también para los ceros de las funciones de Bessel.

Las transformaciones LG aparecen en la teoría de ecuaciones diferenciales ordi-

narias [68, 82], relacionadas con el estudio asintótico y con la distribución WKB de los ceros de las soluciones de dichas ecuaciones [3].

Las referencias acerca de las aplicaciones de los teoremas de Sturm para el estudio de ceros de funciones hipergeométricas también son numerosas. Se pueden encontrar distintas formulaciones del teorema básico de Sturm para ecuaciones diferenciales de segundo orden en las referencias [5, 82, 88], entre otros. Un análogo en el caso de ecuaciones en diferencias aparece estudiado en [20]. En el caso de las familias de polinomios ortogonales clásicos (Jacobi, Laguerre, Hermite) la referencia ineludible es una vez más [80], y otros resultados importantes aparecen en [51, 55, 2].

En este trabajo analizaremos ciertas transformaciones de Liouville-Green (LG) de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de Gauss, Kummer y Bessel. En el capítulo anterior se han comentado las restricciones que imponemos para obtener los cambios de variable que llamamos admisibles. Estos cambios de variable constituyen familias de transformaciones de Liouville-Green cuyo análisis permite obtener propiedades de los ceros reales de las funciones hipergeométricas de manera sistemática.

Los cambios de variable admisibles dependen de ciertos parámetros libres, dos en el caso de las funciones de Gauss y uno para las funciones de Kummer y Bessel. Veremos que existen determinados valores críticos de estos parámetros, de manera que las propiedades de tipo Sturm que se obtienen (cotas de distancias entre ceros consecutivos y monotonía de estas distancias) son diferentes según sea la relación entre los parámetros de la función hipergeométrica y estos valores críticos.

Con estos resultados se pueden cubrir familias bastante generales de cambios de variable, y como casos particulares se obtienen los resultados de Szegő para polinomios ortogonales clásicos (véase [80]) y generalizaciones de resultados ya conocidos, como [44]. El contenido de este capítulo se corresponde íntegramente con el de las referencias originales [11] y [12].

2.2. Transformaciones LG de la ecuación de Gauss

2.2.1. Cambios de variable admisibles

Recordamos la ecuación hipergeométrica de Gauss (1.3):

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0. \quad (2.1)$$

En primer lugar, siguiendo lo expuesto en el capítulo anterior, analizamos las condiciones de oscilación sobre los parámetros en el intervalo $(0, 1)$. Estas condiciones se obtienen en [34] como resultado del estudio de diferentes sistemas de ecuaciones difero-diferenciales (1.85) para pares de funciones de Gauss contiguas. Los sistemas que se analizan se eligen con la condición de que los coeficientes sean funciones

continuas en la variable x en el intervalo $(0, 1)$. En dicho intervalo las condiciones son las siguientes:

$$a < 0, \quad b > 1, \quad c - a > 1, \quad c - b < 0 \quad (2.2)$$

En la citada referencia se pueden encontrar condiciones análogas para el estudio de la ecuación en los intervalos $(-\infty, 0)$ o $(1, \infty)$.

En la notación Jacobi, con los parámetros $n = -a$, $\alpha = c - 1$, $\beta = b + a - c$, las condiciones de oscilación en $(0, 1)$ son las siguientes:

$$n > 0, \quad n + \alpha > 0, \quad n + \beta > 0, \quad n + \alpha + \beta > 0 \quad (2.3)$$

En este capítulo supondremos en todo momento que estas condiciones se cumplen. Asimismo utilizaremos también la notación $L = 2n + \alpha + \beta + 1$.

Vamos a aplicar las restricciones en los cambios de variable $z = z(x)$ que hemos comentado anteriormente: resolver $\Omega'(x) = 0$ debe ser equivalente a resolver una ecuación a lo más cuadrática. Si aplicamos a la ecuación de Gauss un cambio de variable $z = z(x)$ tal que:

$$z'(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad (2.4)$$

es posible establecer una familia de cambios de variable bastante general en estas condiciones [11, 12]. Con un cambio de variable de este tipo la función $\Omega(x)$ tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & \frac{1}{4} x^{2(1-p)} (1-x)^{2(1-q)} \times \\ & \times \left(\frac{L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1 - 2(p-1)(q-1)}{x(1-x)} + \frac{p^2 - \alpha^2}{x^2} + \frac{q^2 - \beta^2}{(1-x)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podemos reescribir esta función de la siguiente manera:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} x^{-2p} (1-x)^{-2q} P(x), \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} P(x) = & (-L^2 - 1 + 2(p-1)(q-1) + p^2 + q^2)x^2 \\ & + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1 - 2(p-1)(q-1) - 2p^2)x + p^2 - \alpha^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si derivamos obtenemos:

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4} x^{-2p-1} (1-x)^{-2q-1} Q(x), \quad (2.8)$$

donde $Q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Si queremos que resolver $\Omega'(x) = 0$ sea equivalente a resolver una ecuación a lo más cuadrática tenemos que pedir o bien que $a_3 = 0$, o bien $Q(0) = 0$, o bien $Q(1) = 0$; estas condiciones son:

$$a_3 = \frac{1}{2}(L^2 - (p + q - 1)^2)(1 - p - q) = 0, \quad (2.9)$$

$$Q(0) = -\frac{1}{2}p(p^2 - \alpha^2) = 0, \quad (2.10)$$

$$Q(1) = \frac{1}{2}q(q^2 - \beta^2) = 0. \quad (2.11)$$

Si alguna de estas condiciones se tiene que cumplir para cualesquiera valores de los parámetros n , α y β entonces tenemos que pedir que se verifique una de las siguientes condiciones:

$$p + q = 1, \quad p = 0, \quad q = 0 \quad (2.12)$$

Estos cambios de variable conducen a propiedades de tipo Sturm válidas para cualquier solución de la ecuación hipergeométrica y para cualquier valor de n .

A partir de (2.9), (2.10) y (2.11) es claro que otros posibles cambios de variable, que ya no son independientes de los parámetros de la función, son:

$$|L| = |p + q - 1|, \quad |p| = |\alpha|, \quad |q| = |\beta|. \quad (2.13)$$

Nos referiremos a estos cambios como implícitos, en el sentido de que tanto las propiedades como el cambio de variable dependen de los parámetros de la función. Veremos que es posible obtener algunas propiedades de tipo Sturm, pero normalmente no de forma global en los parámetros, lo cual en nuestro estudio tiene menos interés.

Observación 2.2.1 *De la expresión (2.5) se desprende que intercambiar p y q es equivalente a intercambiar α y β y también x y $1 - x$. Esta propiedad es importante para ahorrar cálculos posteriormente: por ejemplo, el caso $p = 0$ se obtiene sin cálculos adicionales a partir del estudio de $q = 0$ aplicando estos cambios.*

Estos cambios de variable vienen en general expresados a su vez mediante funciones hipergeométricas. Teniendo en cuenta que $x \in (0, 1)$, si $p > 0$ podemos tomar:

$$z(x) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt =: B_x(p, q), \quad p > 0. \quad (2.14)$$

Si $q > 0$ podemos elegir:

$$z(x) = -B_{1-x}(q, p), \quad q > 0, \quad (2.15)$$

donde $B(p, q)$ indica la función Beta incompleta de parámetros p y q . Estas funciones Beta se pueden escribir a su vez como funciones hipergeométricas de Gauss:

$$B_x(p, q) = \frac{x^p}{p} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1 - q, p \\ p + 1 \end{matrix}; x \right), \quad (2.16)$$

$$B_{1-x}(q, p) = -\frac{(1-x)^q}{q} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1 - p, q \\ q + 1 \end{matrix}; 1 - x \right). \quad (2.17)$$

En términos de las funciones hipergeométricas de Gauss, estos cambios son válidos cuando $p \neq 0, -1, -2, \dots$ y cuando $q \neq 0, -1, -2, \dots$, respectivamente. Cuando $p = 0$ o cuando $q = 0$ los cambios de variable (2.14) y (2.15) no están definidos, pero las diferencias $\Delta z_k = z(x_{k+1}) - z(x_k)$ sí lo están:

$$\Delta z_k(p, q) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad x_k, x_{k+1} \in (0, 1). \quad (2.18)$$

Con esta notación, $\Delta z_k(p, q)$, indicamos la dependencia del cambio de variable respecto a p y q . El cambio de variable incluye un término $\log(x)$ cuando $p = 0$ y un término $\log(1-x)$ cuando $q = 0$. Por ejemplo, cuando $p = 0$ podemos tomar:

$$z(x) = \log(x) + (1-q)x {}_3F_2(1, 1, 2-q; 2, 2; x). \quad (2.19)$$

Al deshacer el cambio de variable y aplicar el teorema de Sturm citado anteriormente obtendremos relaciones entre los ceros de la solución de la ecuación diferencial en términos de funciones Beta evaluadas en dichos ceros. Naturalmente esta información será más práctica en aquellos casos en los que dichas funciones Beta se reduzcan a funciones elementales, de modo que las relaciones entre los ceros queden expresadas de manera cerrada. Esto ocurre en los casos estudiados en [11], que corresponden a los valores $p = 0, 1/2, 1$.

En las secciones siguientes vamos a llevar a cabo un análisis de los tres cambios de variable expuestos en (2.12). En primer lugar veremos el cambio de variable general y después analizaremos casos particulares de importancia en la literatura y en las aplicaciones, que son estudiados con detalle en [11]. Por último estudiaremos de manera breve algunos resultados que se obtienen con los cambios (2.13).

2.2.2. Análisis del caso $p + q = 1$

En este caso la función $\Omega(x)$ es:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} x^{-2p} (1-x)^{2p-2} P(x), \quad (2.20)$$

donde

$$P(x) = -L^2 x^2 + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1 - 2p)x + p^2 - \alpha^2. \quad (2.21)$$

La derivada es:

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4}x^{-2p-1}(1-x)^{2p-3}Q(x), \quad (2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} Q(x) = & ((1-2p)(1-L^2) + \alpha^2 - \beta^2)x^2 \\ & + [(1-2p)(L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1 - 2p) + 2(p^2 - \alpha^2)]x - 2p(p^2 - \alpha^2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

En muchos casos el estudio de los valores de $\Omega(x)$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow 1^-$ y el número de ceros de $\Omega(x)$ en el intervalo $(0, 1)$ será suficiente para deducir las propiedades básicas que necesitamos para aplicar los teoremas de tipo Sturm que vimos en el capítulo anterior.

Por ejemplo, supongamos que $0 < p < 1/2$, $|\alpha| < p$ y $|\beta| < 1 - p$. Como $P(0) = p^2 - \alpha^2 > 0$ y $P(1) = (p-1)^2 - \beta^2 > 0$, la función $\Omega(x)$ tiende a $+\infty$ tanto en $x = 0$ como en $x = 1$. Teniendo en cuenta el signo del coeficiente de grado dos y del término independiente en (2.21), es directo ver que la función $\Omega(x)$ no tiene ceros en $(0, 1)$, de modo que tiene un mínimo $x_m \in (0, 1)$ tal que $\Omega(x_m) > 0$.

Para no sobrecargar la presentación, remitimos al lector al apéndice para más detalles de los cálculos en los diferentes casos, que se resuelven de manera similar. Únicamente mencionamos aquí el siguiente cambio de variable, que será útil para analizar el comportamiento de la función $\Omega(x)$:

$$t = \frac{x}{1-x}. \quad (2.24)$$

Este cambio lleva el intervalo $(0, 1)$ en $(0, \infty)$ y preserva las propiedades de monotonía. En la variable t los coeficientes de $Q(x(t))$ admiten una expresión más sencilla:

$$\Omega(t) = \frac{t^{-2p}}{4} [((p-1)^2 - \beta^2)t^2 + \Lambda t + p^2 - \alpha^2], \quad (2.25)$$

donde

$$\Lambda = L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + p^2 + (p-1)^2. \quad (2.26)$$

A partir de las condiciones (2.3) es sencillo probar que $\Lambda > 0$, puesto que podemos escribir

$$L^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{2} [L^2 - (\alpha + \beta)^2 + L^2 - (\alpha - \beta)^2]. \quad (2.27)$$

Expresando los factores de la derecha como suma por diferencia es claro que son ambos positivos.

En cuanto a la derivada:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{t^{-2p-1}}{2}Q(t), \quad (2.28)$$

donde

$$Q(t) = (p-1)((p-1)^2 - \beta^2)t^2 + (p-1/2)\Lambda t + p(p^2 - \alpha^2). \quad (2.29)$$

Los valores de p y q que anulan los coeficientes de las partes polinómicas de $\Omega(t)$ y $\Omega'(t)$ indican cambios de comportamiento de la función, y son los que delimitan regiones con diferentes propiedades de tipo Sturm, como veremos más adelante. El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.2.1 *Sea la función $\Omega(x)$ dada por (2.20) y (2.21) y supongamos que se cumplen las condiciones (2.3). Salvo en el caso en el que $0 < p < 1/2$, $|\alpha| < |p|$ y $|\beta| > |p-1|$ simultáneamente, o bien $1/2 < p < 1$, $|\alpha| > |p|$ y $|\beta| < |p-1|$ simultáneamente, una de las siguientes situaciones se produce, independientemente del valor de n :*

- (1) *La función $\Omega(x)$ tiene un máximo $x_M \in (0, 1)$ y $K_M := \Omega(z(x_M)) > 0$.*
- (2) *La función $\Omega(x)$ tiene un mínimo $x_m \in (0, 1)$ y $K_m := \Omega(z(x_m)) > 0$.*
- (3) *La función $\Omega(x)$ es estrictamente creciente en $(0, 1)$ cuando es positiva.*
- (4) *La función $\Omega(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, 1)$ cuando es positiva.*
- (5) *La función $\Omega(x)$ es constante.*

Adicionalmente, en el caso $p = 1/2$, cuando $|\alpha| = 1/2$ o $|\beta| = 1/2$ la función $\Omega(x)$ alcanza un máximo o mínimo positivo en $x = 0$ o en $x = 1$.

Por medio del teorema de Sturm es sencillo relacionar las propiedades de la función $\Omega(x)$ del resultado anterior con la información acerca de los ceros. En efecto, si la función $\Omega(x)$ tiene un máximo (mínimo) en $(0, 1)$ entonces las correspondientes diferencias $\Delta z_k(p, 1-p)$, dadas por (2.18), estarán acotadas inferiormente (superiormente) por una constante que depende del valor de $\Omega(x)$ en dicho máximo (mínimo), que hemos llamado K_M (K_m). Por otro lado, si la función $\Omega(x)$ es creciente (decreciente) en $(0, 1)$ entonces las diferencias $\Delta z_k(p, 1-p)$ serán decrecientes (crecientes) como función de k .

Los resultados generales se pueden resumir en los dos siguientes teoremas. En primer lugar, cuando la función $\Omega(x)$ es monótona:

Teorema 2.2.2 *Excepto cuando $|\alpha| = |\beta| = p = 1/2$, las diferencias $\Delta z_k(p, 1-p)$, dadas por la fórmula (2.18), satisfacen:*

1. *Si $p \leq 1/2$, $|\alpha| \geq p$ y $|\beta| \leq 1-p$, entonces $\Delta z_k(p, 1-p)$ es decreciente como función de k , es decir, $\Delta z_{k+1}(p, 1-p) < \Delta z_k(p, 1-p)$.*
2. *Si $p \geq 1/2$, $|\alpha| \leq p$ y $|\beta| \geq 1-p$ entonces $\Delta z_k(p, 1-p)$ es creciente como función de k .*

Cuando $|\alpha| = |\beta| = p = 1/2$ las diferencias $\Delta z_k(p, 1-p)$ son constantes.

En el resultado anterior, cuando p o $1-p$ son negativos se entiende que no hay restricción en el parámetro correspondiente. Por otro lado, en el caso de que la función $\Omega(x)$ tiene un extremo positivo en el intervalo $(0, 1)$:

Teorema 2.2.3 *Las diferencias $\Delta z_k(p, 1-p)$ satisfacen las siguientes cotas:*

- Si $|\alpha| < p$ y $|\beta| < 1-p$ entonces $\Delta z_k(p, 1-p) < \pi/\sqrt{K_m}$.
- Si $|\alpha| > p$ y $|\beta| > 1-p$ entonces $\Delta z_k(p, 1-p) > \pi/\sqrt{K_M}$.

Si $p < 1/2$ entonces los resultados de (2.2.3) se pueden extender a las fronteras que no estén incluidas en (2.2.2). Cuando $p = 1/2$ las fronteras son límite continuo de ambas situaciones (monotonía y cotas), puesto que en esos casos la función $\Omega(x)$ es monótona y al mismo tiempo alcanza un máximo o mínimo en $x = 0$ o en $x = 1$. En estos casos obtenemos las dos propiedades de tipo Sturm, y las correspondientes cotas de distancias entre ceros se pueden obtener sustituyendo directamente los valores de α y β en las fórmulas de K_M y K_m .

En los casos en los que la función tiene un máximo o un mínimo, los puntos x_M y x_m y los correspondientes valores K_M y K_m se pueden calcular resolviendo la ecuación (2.23), pero es más sencillo resolver (2.29) en la variable t y sustituir la solución en (2.25). Si resolvemos $\Omega'(t) = 0$, las dos raíces son:

$$t_{\pm} = \frac{(1/2 - p)\Lambda}{2(p-1)((p-1)^2 - \beta^2)} \delta, \quad (2.30)$$

donde

$$\delta = 1 \pm \operatorname{sgn}(1-2p) \sqrt{1 - \frac{4p(p-1)(p^2 - \alpha^2)((p-1)^2 - \beta^2)}{(p-1/2)^2 \Lambda^2}}. \quad (2.31)$$

De estas dos soluciones, una de ellas corresponde a un extremo en el que la función $\Omega(t)$ es positiva. Para determinar cuál de ellas es la correcta en el caso $0 < p < 1$ basta considerar la expresión anterior y los signos de cada factor según los casos, puesto que una de las raíces es positiva y otra es negativa. Cuando $p < 0$ o $p > 1$ es necesario recurrir a los valores de $\Omega(t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$ y cuando $t \rightarrow +\infty$. El resultado es el siguiente:

- Cuando la función $\Omega(t)$ tiene un máximo ($|\alpha| > p$, $|\beta| > 1-p$) entonces la raíz correcta es t_+ .
- Cuando la función $\Omega(t)$ un mínimo ($|\alpha| < p$, $|\beta| < 1-p$) y $0 < p < 1$, entonces la raíz correcta es t_- .

Si imponemos $\Omega'(t_{\pm}) = 0$, entonces, a partir de (2.28):

$$(1-p)[(p-1)^2 - \beta^2]t_{\pm}^2 = (p-1/2)\Lambda t_{\pm} + p(p^2 - \alpha^2). \quad (2.32)$$

Si sustituimos en la fórmula de $\Omega(t)$ (2.25) obtenemos:

$$\Omega(t_{\pm}) = \frac{1}{4}t_{\pm}^{-2p}(1-p)^{-1} \left[\frac{1}{2}\Lambda t_{\pm} + p^2 - \alpha^2 \right]. \quad (2.33)$$

Alternativamente:

$$\Omega(t_{\pm}) = \frac{1}{4}t_{\pm}^{-2(p-1)}p^{-1} \left[\frac{1}{2}\Lambda t_{\pm}^{-1} + (p-1)^2 - \beta^2 \right]. \quad (2.34)$$

Esto muestra que el valor de $\Omega(t)$ en los extremos correspondientes es efectivamente positivo en cada caso. La sustitución explícita de t_+ y t_- en $\Omega(t)$ es bastante aparatosa, por ello a modo de ejemplo consideramos el siguiente caso simplificado:

- Cuando $0 < p < 1/2$, $|\alpha| < |p|$ y $|\beta| = |1-p|$ la función $\Omega(x)$ tiene un mínimo en $(0, 1)$:

$$t_- = \frac{2p(p^2 - \alpha^2)}{(1-2p)(L^2 + p^2 - \alpha^2)} > 0, \quad (2.35)$$

y sustituyendo en (2.25):

$$K_m = \Omega(t_-) = \frac{1}{4} \left[\frac{2p}{L^2 + p^2 - \alpha^2} \right]^{-2p} \left[\frac{p^2 - \alpha^2}{1-2p} \right]^{1-2p} > 0. \quad (2.36)$$

- Cuando $p < 1/2$, $|\alpha| = |p|$ y $|\beta| > |p-1|$ la función $\Omega(x)$ tiene un máximo en $(0, 1)$:

$$t_+ = \frac{(1-2p)(L^2 - \beta^2 + (p-1)^2)}{2(1-p)(\beta^2 - (p-1)^2)} > 0, \quad (2.37)$$

y sustituyendo en (2.25):

$$K_M = \Omega(t_+) = \frac{1}{4} \left[\frac{1-2p}{\beta^2 - (p-1)^2} \right]^{1-2p} \left[\frac{L^2 - \beta^2 + (p-1)^2}{2(1-p)} \right]^{2-2p} > 0. \quad (2.38)$$

En el apéndice se dan estimaciones asintóticas de las raíces t_{\pm} y del valor de la función $\Omega(t)$ en dichos puntos cuando $n \rightarrow \infty$.

Con el fin de ilustrar estos teoremas presentamos la siguiente secuencia gráfica, donde se muestran los diferentes casos según crece p . Hemos representado el parámetro α en la horizontal y β en la vertical, de modo que dado un valor de p podemos determinar los valores de α y β que corresponden a cada situación. En cada región indicamos cuál de los casos del teorema (2.2.1) se aplica. Las rectas que dividen las diferentes zonas corresponden a casos en los que el comportamiento en $x = 0$ y $x = 1$ puede cambiar debido a que el término independiente de $P(x)$ en (2.21) se anula y es posible extraer un factor común x o $1-x$.

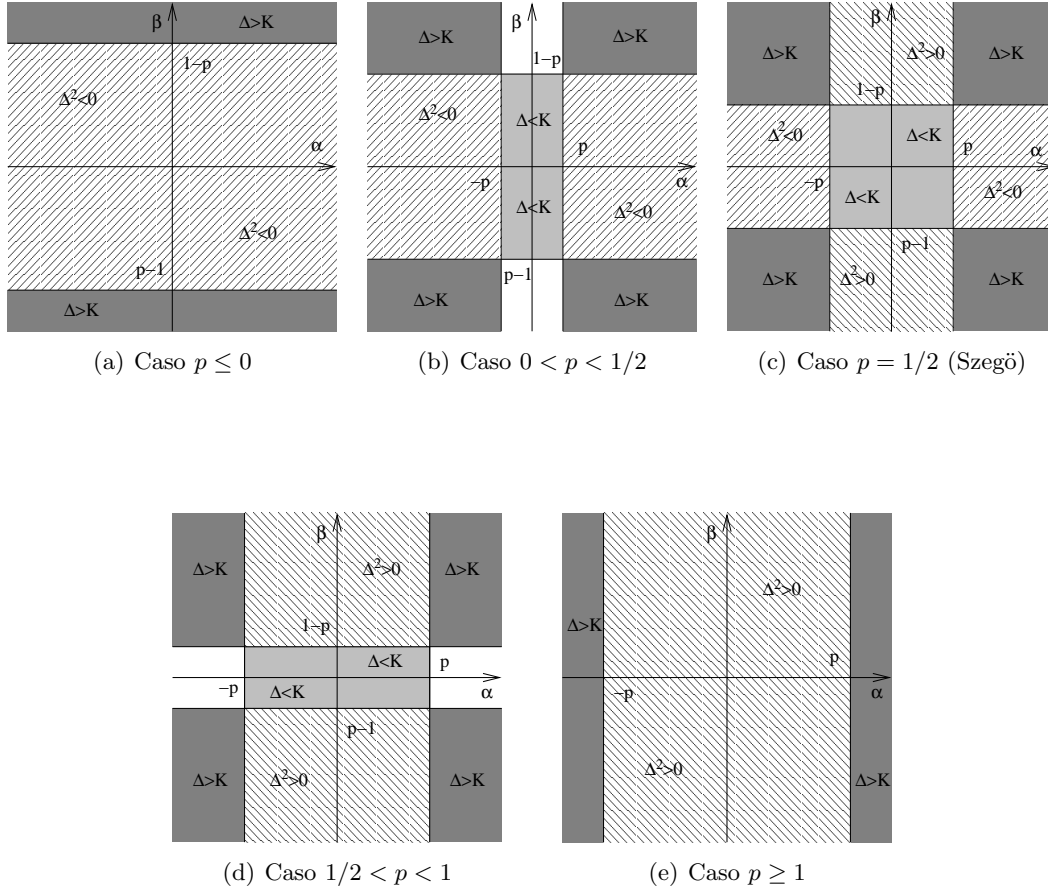


Figura 2.1: Gráfica de las regiones que corresponden a diferentes propiedades de tipo Sturm, en el caso $p + q = 1$. En este contexto $\Delta \equiv \Delta_{z_k}(p, 1 - p)$ y $\Delta^2 \equiv \Delta^2_{z_k}(p, 1 - p)$. Con K se indica K_m o K_M , tal y como aparece en el teorema (2.2.3). La leyenda es: Gris oscuro, caso (1). Gris claro, caso (2). Líneas diagonales de izquierda a derecha, caso (3). Líneas diagonales de derecha a izquierda, caso (4). En blanco: casos no cubiertos en el teorema.

2.2.3. Casos no globales

En los casos no cubiertos en el Teorema 2.2.1, $0 < p < 1/2$, $|\alpha| < |p|$ y $|\beta| > |p-1|$, o bien $1/2 < p < 1$, $|\alpha| > |p|$ y $|\beta| < |p-1|$, se pueden dar dos situaciones diferentes: la función $\Omega(x)$ puede ser monótona en $(0, 1)$ o bien puede tener dos extremos relativos, en los que la función es positiva. Ambas situaciones son posibles, como se muestra en la figura 2.2.

Estas situaciones corresponden (respectivamente) a que la parte polinómica de $\Omega'(t)$ tenga dos ceros reales o ninguno, lo cual depende del signo del discriminante

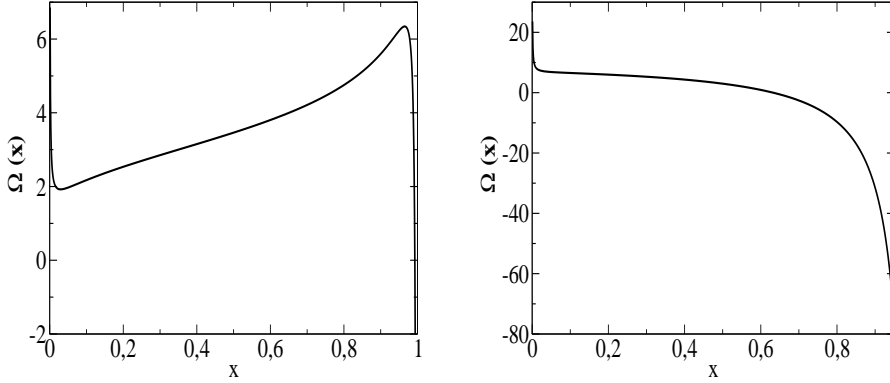


Figura 2.2: Gráfica de dos casos no cubiertos en el teorema 2.2.1, correspondientes a $q = 0$. A la izquierda, $p = 0,375$, $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,7$, $n = 1$, la función $\Omega(x)$ tiene dos extremos relativos en $(0, 1)$ y la función es positiva en estos puntos. A la derecha, $p = 0,49$, $\alpha = -0,4$, $\beta = 4,1$, $n = 1$, la función $\Omega(x)$ es monótona decreciente.

de dicha parte polinómica, que llamamos Δ :

$$\Delta = (p - 1/2)^2 \Lambda^2 - 4p(p - 1)(p^2 - \alpha^2)((p - 1)^2 - \beta^2). \quad (2.39)$$

Este discriminante cambia de signo en:

$$\Lambda_0 = \frac{\sqrt{4p(p - 1)(p^2 - \alpha^2)((p - 1)^2 - \beta^2)}}{|p - 1/2|}, \quad (2.40)$$

y es claro que $\Delta < 0$ cuando $\Lambda < \Lambda_0$ y $\Delta > 0$ cuando $\Lambda > \Lambda_0$. Por otro lado, para probar que la función $\Omega(t)$ es positiva en los extremos relativos en caso de que $\Lambda > \Lambda_0$ basta tener en cuenta las fórmulas (2.33) y (2.34).

Como consecuencia de todo ello podemos enunciar el siguiente resultado de monotonía parcial:

Teorema 2.2.4 *Sea $p \in (0, 1)$ y $(p^2 - \alpha^2)((p - 1)^2 - \beta^2) < 0$. Sea Λ dado por (2.26) y Λ_0 dado por (2.40). Si $\Lambda \leq \Lambda_0$ entonces:*

- Si $|p| > |\alpha|$ y $p < 1/2$, $\Delta z_k(p, 1 - p)$ es creciente como función de k .
- Si $|p| < |\alpha|$ y $p > 1/2$, $\Delta z_k(p, 1 - p)$ es decreciente como función de k .

Si $B > B_0$ entonces $\Delta > 0$ y no hay propiedades globales de tipo Sturm, puesto que la función $\Omega(x)$ tiene dos extremos locales y $\Omega(0^+) = \pm\infty$, $\Omega(1^-) = \mp\infty$.

Este resultado se obtiene también de manera clara a partir de las estimaciones asintóticas contenidas en el apéndice: cuando n es suficientemente grande entonces $\Delta > 0$, puesto que $\Delta = \mathcal{O}(n^2)$, teniendo en cuenta (2.26) y que $L = 2n + \alpha + \beta + 1$. De esta forma, no es posible establecer propiedades de tipo Sturm uniformes respecto a n en estas zonas.

2.2.4. Casos particulares

En esta sección vamos a considerar algunos casos particulares de los resultados anteriores, donde los cambios de variable se pueden calcular explícitamente. Estos casos aparecen analizados en [11], e incluyen varios resultados clásicos de la teoría de polinomios ortogonales, así como generalizaciones a familias más amplias de funciones hipergeométricas.

Caso $p = q = 1/2$. Desigualdades de Szegő

En este caso podemos tomar $z(x) = \arccos(1 - 2x)$, un cambio de variable que nos lleva el intervalo $(0, 1)$ en el intervalo $(0, \pi)$. Las funciones en este caso son:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} \left[L^2 - \frac{\alpha^2 - 1/4}{x} - \frac{\beta^2 - 1/4}{1-x} \right], \quad (2.41)$$

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha^2 - 1/4}{x^2} - \frac{\beta^2 - 1/4}{(1-x)^2} \right]. \quad (2.42)$$

Si aplicamos los teoremas (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) obtenemos:

Teorema 2.2.5 *Supongamos que n, α y β satisfacen las condiciones (2.3). Salvo en el caso $|\alpha| = |\beta| = 1/2$, las diferencias $\Delta z_k(1/2, 1/2)$, definidas por (2.18), satisfacen lo siguiente:*

- Si $|\alpha| \geq 1/2$ y $|\beta| \leq 1/2$, entonces $\Delta z_k(1/2, 1/2)$ es decreciente como función de k , es decir, $\Delta z_{k+1}(1/2, 1/2) < \Delta z_k(1/2, 1/2)$.
- Si $|\alpha| \leq 1/2$ y $|\beta| \geq 1/2$, entonces $\Delta z_k(1/2, 1/2)$ es creciente como función de k , es decir, $\Delta z_{k+1}(1/2, 1/2) > \Delta z_k(1/2, 1/2)$.
- Si $|\alpha| < 1/2$ y $|\beta| < 1/2$, entonces $\Delta z_k(1/2, 1/2) < \pi/\sqrt{K_m}$.
- Si $|\alpha| > 1/2$ y $|\beta| > 1/2$, entonces $\Delta z_k(1/2, 1/2) > \pi/\sqrt{K_M}$.

Si $|\alpha| = |\beta| = 1/2$ entonces $\Delta z_k(1/2, 1/2)$ es constante. Los resultados tercero y cuarto se pueden extender a los casos de igualdad, teniendo en cuenta que en esos casos el máximo o mínimo de $\Omega(x)$ se alcanza en $x = 0$ (cuando $|\alpha| = 1/2$) o en $x = 1$ (cuando $|\beta| = 1/2$).

En este caso podemos además calcular explícitamente los extremos en los casos en los que la función tiene un máximo o un mínimo. En efecto, la derivada se anula en $(0, 1)$ en el punto:

$$x_e = \frac{\sqrt{|1/4 - \alpha^2|}}{\sqrt{|1/4 - \alpha^2|} + \sqrt{|1/4 - \beta^2|}}, \quad (2.43)$$

y en este punto alcanza el valor:

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{4} \left[L^2 \pm \left(\sqrt{|1/4 - \alpha^2|} + \sqrt{|1/4 - \beta^2|} \right)^2 \right], \quad (2.44)$$

donde el signo positivo corresponde al caso en el que la función tiene un mínimo y el signo negativo al caso en el que tiene un máximo. En la notación del teorema (2.2.1) podemos escribir:

$$K_m = \frac{1}{4} \left[L^2 + \left(\sqrt{|1/4 - \alpha^2|} + \sqrt{|1/4 - \beta^2|} \right)^2 \right], \quad (2.45)$$

$$K_M = \frac{1}{4} \left[L^2 - \left(\sqrt{|1/4 - \alpha^2|} + \sqrt{|1/4 - \beta^2|} \right)^2 \right]. \quad (2.46)$$

Cuando $|\alpha| = 1/2$ o $|\beta| = 1/2$, el correspondiente valor de K_m o K_M para el mínimo o máximo de $\Omega(x)$ en $x = 0$ o en $x = 1$ se obtiene sustituyendo directamente los valores de α y β en (2.45) o en (2.46) y simplificando, y la correspondiente cota para la distancia entre ceros se sigue de este cálculo sin dificultad.

Estos resultados aparecen en [11], y mejoran ligeramente los establecidos en la referencia clásica de Szegő [80] para el caso de polinomios de Jacobi. En este caso n es un entero negativo, y los parámetros verifican $\alpha, \beta > -1$. Las condiciones que hemos impuesto aquí (2.3) son más generales, lo cual nos permite cubrir más casos dentro de la familia de funciones hipergeométricas de Gauss.

Caso $p = 0$

Si $p = 0$ y $q = 1$ es directo ver que el cambio de variable es $z(x) = \log(x)$.

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} \left[-L^2 + \frac{L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 1}{1 - x} + \frac{1 - \beta^2}{(1 - x)^2} \right], \quad (2.47)$$

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4(1 - x)^3} [(-L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1)x + L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1]. \quad (2.48)$$

Si aplicamos los teoremas (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) obtenemos:

Teorema 2.2.6 *Supongamos que n , α y β satisfacen las condiciones (2.3), consideramos el cambio de variable $z(x) = \log(x)$. Entonces:*

- Si $|\beta| \leq 1$ entonces $\Delta z_k(0, 1)$ es decreciente en k .
- Si $|\beta| > 1$ entonces $\Delta z_k(0, 1) > \pi/\sqrt{K_M}$.

Cuando $|\beta| > 1$ podemos calcular explícitamente este extremo local y el valor de K_M :

$$x_M = \frac{L^2 - \alpha^2 - (\beta^2 - 1)}{L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 1}. \quad (2.49)$$

A partir de las condiciones (2.3) se puede probar que $0 < x_e < 1$. Además:

$$K_M = \frac{1}{16} \frac{[(L + \alpha)^2 + 1 - \beta^2][(L - \alpha)^2 + 1 - \beta^2]}{\beta^2 - 1} \quad (2.50)$$

Podemos reescribir el resultado para los ceros de los polinomios de Jacobi. Recordemos que los parámetros n , α y β se mantienen, con la condición de que n es un entero positivo, que corresponde al grado del polinomio, y $\alpha, \beta > -1$. La variable de los polinomios de Jacobi es $\tilde{x} = 1 - 2x$, donde $x \in (0, 1)$ es la variable de la función hipergeométrica de Gauss.

Corolario 2.2.1 *Supongamos que se satisfacen las condiciones (2.3) y sean \tilde{x}_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, los ceros del polinomio de Jacobi de grado N en el intervalo $(-1, 1)$.*

■ Si $|\beta| \leq 1$ entonces:

$$(1 - \tilde{x}_k)^2 > (1 - \tilde{x}_{k+1})(1 - \tilde{x}_{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, N - 2. \quad (2.51)$$

■ Si $|\beta| > 1$ entonces:

$$\frac{1 - \tilde{x}_k}{1 - \tilde{x}_{k+1}} > \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_M}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 2. \quad (2.52)$$

El resultado (2.51) aparece probado en la referencia [44] para el caso particular de los polinomios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$), pero vemos que la desigualdad se verifica para un conjunto más amplio de polinomios de Jacobi, y de hecho para las funciones hipergeométricas de Gauss no polinómicas con la restricción $|\beta| \leq 1$.

Teniendo en cuenta la observación (2.2.1) podemos intercambiar p y $1 - p = q$, α y β , x y $1 - x$. El cambio de variable es ahora $z(x) = -\log(1 - x)$ y obtenemos el siguiente resultado (en términos de los polinomios de Jacobi):

Corolario 2.2.2 *Supongamos que se satisfacen las condiciones (2.3) y sean \tilde{x}_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, los ceros del polinomio de Jacobi de grado N .*

■ Si $|\alpha| \leq 1$ entonces:

$$(1 + \tilde{x}_k)^2 > (1 + \tilde{x}_{k+1})(1 + \tilde{x}_{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, N - 2. \quad (2.53)$$

■ Si $|\alpha| > 1$ entonces:

$$\frac{1 + \tilde{x}_{k+1}}{1 + \tilde{x}_k} > \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{\tilde{K}_M}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 2. \quad (2.54)$$

La constante \tilde{K}_M resulta de intercambiar α y β en (2.50).

2.2.5. Análisis del caso $q = 0$ ($p = 0$)

En esta sección vamos a analizar las propiedades de la función $\Omega(x)$ cuando el cambio de variable es de la forma (2.4) y $q = 0$. Teniendo en cuenta la observación 2.2.1, es directo obtener el resultado análogo cuando $p = 0$ haciendo las sustituciones $p \leftrightarrow q$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ y $x \leftrightarrow 1 - x$. Por esta razón los cálculos se han realizado en el caso $q = 0$ y en los teoremas se incluyen directamente ambos casos con estas sustituciones.

Cuando $q = 0$ la función $\Omega(x)$ es:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4}x^{-2p} (Ex^2 + Fx + G), \quad (2.55)$$

donde:

$$\begin{aligned} E &= (p-1)^2 - L^2, \\ F &= L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - p^2 - (p-1)^2, \\ G &= p^2 - \alpha^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

En cuanto a la derivada:

$$\Omega'(x) = \frac{1}{2}x^{-2p-1} ((p-1)Ex^2 + (p-1/2)Fx + pG). \quad (2.57)$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente, remitimos al lector al Apéndice B para los detalles de las demostraciones:

Teorema 2.2.7 *Sea la función $\Omega(x)$ dada por (2.55), y supongamos que se cumplen las condiciones (2.3).*

1. *Cuando $q = 0$, salvo si $0 < p < 1/2$ y $|\alpha| < p$, una de las siguientes situaciones se produce, independientemente del valor de n :*

- (1) *La función $\Omega(z(x))$ tiene un máximo $x_M \in (0, 1)$ y $K_M := \Omega(z(x_M)) > 0$.*
- (2) *La función $\Omega(z(x))$ es estrictamente decreciente en $(0, 1)$ cuando es positiva.*

2. *Cuando $p = 0$, salvo si $0 < q < 1/2$ y $|\beta| < q$, una de las siguientes situaciones se produce, independientemente del valor de n :*

- (1) *La función $\Omega(z(x))$ tiene un máximo $x_M \in (0, 1)$ y $K_M := \Omega(z(x_M)) > 0$.*
- (2) *La función $\Omega(z(x))$ es estrictamente creciente en $(0, 1)$ cuando es positiva.*

El resultado correspondiente para las diferencias $\Delta z_k(p, 0)$ y $\Delta z_k(0, q)$ es el siguiente:

Teorema 2.2.8 *Las diferencias $\Delta z_k(p, q)$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$\Delta z_k(p, 0)$ es creciente como función de k cuando $p \geq 1/2$ y $|\alpha| \leq p$.*

2. $\Delta z_k(0, q)$ es decreciente como función de k cuando $q \geq 1/2$ y $|\beta| \leq q$.

Teorema 2.2.9 Las diferencias $\Delta z_k(p, q)$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\Delta z_k(p, 0) > \pi/\sqrt{K_M}$ cuando $|\alpha| > p$.
2. $\Delta z_k(0, q) > \pi/\sqrt{K_M}$ cuando $|\beta| > q$.

En esta segunda parte está incluido también los casos $|\alpha| = p$, $p < 1/2$ y $|\beta| = q$, $q < 1/2$. Cuando $|\alpha| = p = 1/2$ o $|\beta| = q = 1/2$ entonces la función $\Omega(x)$ es monótona decreciente y alcanza un máximo en $x = 0$ o en $x = 1$ respectivamente.

Como hicimos anteriormente presentamos dos gráficos para ilustrar el teorema y las diferentes características de la función $\Omega(x)$. Una vez más representamos el parámetro α en la horizontal y el parámetro β en la vertical, y la leyenda es similar a la de los gráficos previos.

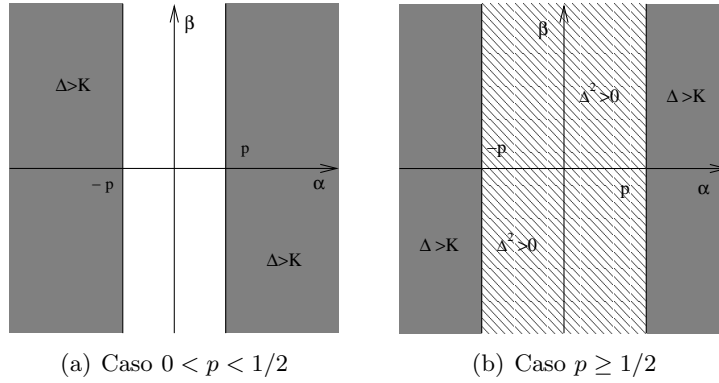


Figura 2.3: Gráfica de las regiones que corresponden a diferentes propiedades de tipo Sturm, en el caso $q = 0$. En este contexto $\Delta \equiv \Delta z_k(p, 0)$, $\Delta^2 \equiv \Delta^2 z_k(p, 0)$. Con K se indica K_M , tal y como aparece en el teorema (2.2.7). La leyenda es: Gris oscuro, caso (1). Líneas diagonales de izquierda a derecha, caso (2). En blanco: casos no cubiertos en el teorema.

Al igual que se hizo en el caso $p + q = 1$, veamos las expresiones para los extremos de $\Omega(x)$ cuando esta función tiene un máximo. Si resolvemos $\Omega'(x) = 0$ obtenemos:

$$x_{\pm} = \frac{-(p - 1/2)F \pm \sqrt{(p - 1/2)^2 F^2 - 4p(p - 1)EG}}{2(p - 1)E}. \quad (2.58)$$

En el apéndice se prueba que la raíz que corresponde al máximo donde $\Omega(x)$ es positiva es x_+ :

$$x_+ = \frac{-(p - 1/2)F}{2(p - 1)E} \left(1 + \operatorname{sgn}[(1/2 - p)F] \sqrt{1 - \frac{4p(p - 1)EG}{(p - 1/2)^2 F^2}} \right). \quad (2.59)$$

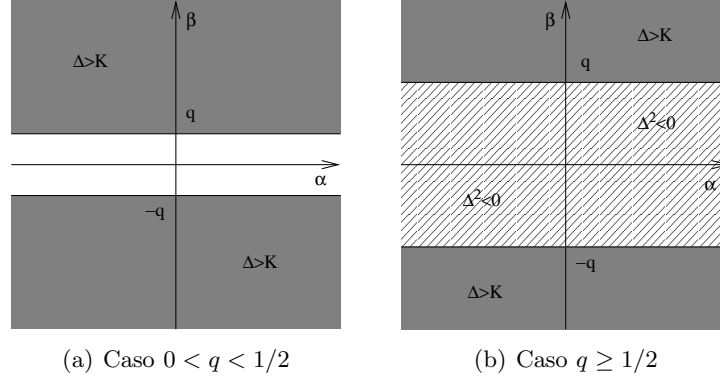


Figura 2.4: Gráfica de las regiones que corresponden a diferentes propiedades de tipo Sturm, en el caso $p = 0$. En este contexto $\Delta \equiv \Delta z_k(0, q)$, $\Delta^2 \equiv \Delta^2 z_k(0, q)$. Con K se indica K_M , tal y como aparece en el teorema (2.2.7). La leyenda es: Gris oscuro, caso (1). Líneas diagonales de izquierda a derecha, caso (2). En blanco: casos no cubiertos en el teorema.

El valor de la función $\Omega(x)$ en este punto es:

$$\Omega(x_+) = \frac{1}{4} x_+^{-2p} (1-p)^{-1} \left[\frac{1}{2} F x_+ G \right]. \quad (2.60)$$

Cuando $|\alpha| > |p|$ se cumple que el coeficiente $F > 0$ es positivo (ver apéndice), lo cual muestra que $\Omega(x_+) > 0$. Cuando $|\alpha| < p$ y $p < 0$ se puede mostrar un resultado similar analizando los valores de $\Omega(0^+)$ y $\Omega(1^-)$.

2.2.6. Casos no globales

Al igual que ocurriría en el caso $p + q = 1$, en los casos no cubiertos en el teorema, $0 < p < 1/2$ y $|\alpha| < p$, se pueden dar dos situaciones diferentes: la función $\Omega(x)$ puede ser monótona en $(0, 1)$ o bien puede tener dos extremos relativos. Ambas situaciones son posibles, como se muestra en la figura 2.5.

Nuevamente, estas situaciones se dan, respectivamente, cuando el discriminante de la parte polinómica de $\Omega'(x)$ tiene dos ceros reales o ninguno. Cuando $q = 0$ este discriminante $\Delta = (p - 1/2)^2 F^2 - 4p(p - 1)EG$ cambia de signo en el punto:

$$F_0 = \frac{\sqrt{4p(p-1)EG}}{|p-1/2|} = \frac{\sqrt{4p(p-1)((p-1)^2 - L^2)(p^2 - \alpha^2)}}{|p-1/2|} \quad (2.61)$$

mientras que en el caso $p = 0$ este cambio de signo se produce en

$$F_0 = \frac{\sqrt{4q(q-1)((q-1)^2 - L^2)(q^2 - \beta^2)}}{|q-1/2|} \quad (2.62)$$

En ambos casos se cumple que $\Delta < 0$ cuando $F < F_0$ mientras que $\Delta > 0$ cuando $F > F_0$, de modo que podemos enunciar el siguiente resultado parcial:

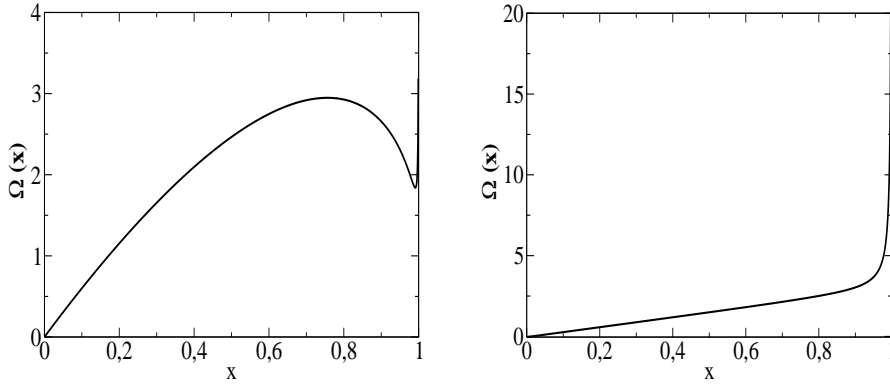


Figura 2.5: Gráfica de dos casos no cubiertos en el teorema general cuando $p = 0$. A la izquierda, $q = 0,33$, $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,01$, $n = 2$, la función $\Omega(x)$ tiene dos extremos relativos en $(0, 1)$. A la derecha, $q = 0,49$, $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,1$, $n = 1$, la función $\Omega(x)$ es monótona creciente.

Teorema 2.2.10 *Las siguientes propiedades de monotonía de $\Delta z_k(p, q)$ se cumplen:*

1. Cuando $q = 0$, $0 < p < 1/2$ y $|\alpha| < p$, consideramos

$$F = L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - p^2 - (p - 1)^2$$

y F_0 dado por (2.61).

- Si $F \leq F_0$ entonces, $\Delta z_k(p, 0)$ es creciente como función de k .
- Si $F > F_0$ entonces no hay propiedades globales de tipo Sturm, puesto que la función $\Omega(x)$ tiene dos extremos locales y $\Omega(0^+) = +\infty$, $\Omega(1^-) \leq 0$.

2. Cuando $p = 0$, $0 < q < 1/2$ y $|\beta| < q$, consideramos

$$F = L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - q^2 - (q - 1)^2$$

y F_0 dado por (2.61).

- Si $F \leq F_0$ entonces, $\Delta z_k(0, q)$ es decreciente como función de k .
- Si $F > F_0$ entonces no hay propiedades globales de tipo Sturm, puesto que la función $\Omega(x)$ tiene dos extremos locales y $\Omega(0^+) \leq 0$, $\Omega(1^-) = +\infty$.

En el apéndice se lleva a cabo un análisis similar al del caso $p + q = 1$ cuando el parámetro n es grande, lo cual ilustra, entre otras cosas, estos casos no cubiertos en el teorema 2.2.7. En efecto, como $L = 2n + \alpha + \beta + 1$ resulta que $\Delta = \mathcal{O}(n^2)$, y para n suficientemente grande se tiene que $\Delta > 0$, de modo que no hay resultados globales de tipo Sturm en estas circunstancias.

2.2.7. Casos particulares

Vamos a considerar los casos particulares que aparecen analizados en [11].

Caso $p = 1/2$, $q = 0$

En este caso el cambio de variable viene dado por:

$$z(x) = -\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}$$

Las funciones tienen la siguiente estructura:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} \left[\alpha^2 - \beta^2 - 1/4 + (L^2 - 1/4)(1-x) - \frac{\alpha^2 - 1/4}{x} \right], \quad (2.63)$$

$$\Omega'(x) = -\frac{1}{4} \left[L^2 - 1/4 - \frac{\alpha^2 - 1/4}{x^2} \right]. \quad (2.64)$$

Aplicando el teorema (2.2.7) obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.11 *Supongamos que n , α y β satisfacen las condiciones (2.3), consideramos el cambio de variable $z(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$. Entonces se cumple:*

- Si $|\alpha| \leq 1/2$ entonces $\Delta z_k(p, 0)$ es decreciente en k .
- Si $|\alpha| > 1/2$ entonces $\Delta z_k(p, 0) > \pi/\sqrt{K_M}$.

Nuevamente podemos calcular explícitamente este máximo:

$$x_M = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1/4}{L^2 - 1/4}}, \quad (2.65)$$

así como el valor de la función en dicho punto:

$$K_M = \frac{1}{4} \left[\left(\sqrt{L^2 - 1/4} - \sqrt{\alpha^2 - 1/4} \right)^2 - \beta^2 \right]. \quad (2.66)$$

Consecuentemente podemos enunciar el siguiente resultado en la variable x :

Teorema 2.2.12 *Sea $y(x)$ una solución no trivial de la ecuación diferencial de Gauss (1.3) en el intervalo $(0, 1)$, y supongamos que se satisfacen las condiciones (2.3). Sea $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{x})$ y sean $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ ceros consecutivos de $y(x)$ en orden creciente.*

- Si $|\alpha| \leq 1/2$ entonces:

$$\frac{(1 - x_{k+1})(1 - x_{k-1})}{(1 - x_k)^2} < \frac{(1 + \sqrt{x_{k+1}})(1 + \sqrt{x_{k-1}})}{(1 + \sqrt{x_k})^2}. \quad (2.67)$$

■ Si $|\alpha| > 1/2$ entonces:

$$\frac{1 - \sqrt{x_{k+1}}}{1 - \sqrt{x_k}} > \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_M}}\right) \quad (2.68)$$

Al igual que ocurría antes podemos intercambiar α y β , p y q , x y $1 - x$. El cambio de variable en estas condiciones es:

$$z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1-x}) = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}.$$

Caso $p = 0$, $q = 0$

Con estos parámetros el cambio de variable es:

$$z(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Las funciones tienen la siguiente estructura:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4} [(1 - L^2)x^2 + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1)x - \alpha^2], \quad (2.69)$$

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4} [2(1 - L^2)x + L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1]. \quad (2.70)$$

Aplicando el teorema (2.2.7) obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.13 *Supongamos que n , α y β satisfacen las condiciones (2.3), consideramos el cambio de variable $z(x) = \log(x/(1-x))$. Entonces se cumple que $\Omega(x)$ tiene un máximo en $(0, 1)$.*

Nuevamente podemos calcular explícitamente este máximo:

$$x_M = \frac{L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1}{2(L^2 - 1)}, \quad (2.71)$$

así como el valor de la función en dicho punto:

$$K_M = \frac{1}{16} \frac{[L^2 - 1 - (\alpha + \beta)^2][L^2 - 1 - (\alpha - \beta)^2]}{L^2 - 1}. \quad (2.72)$$

Por lo tanto podemos enunciar el siguiente resultado en la variable x :

Teorema 2.2.14 *Sea $y(x)$ una solución no trivial de la ecuación diferencial de Gauss (1.3) en el intervalo $(0, 1)$, y supongamos que se satisfacen las condiciones (2.3). Sea $z(x) = \log(x/(1-x))$ y sean $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ ceros consecutivos de $y(x)$ en orden creciente. Entonces se verifica:*

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \frac{1 - x_k}{1 - x_{k+1}} > \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_M}}\right).$$

En el caso de que el cambio de variable satisfaga $q = 0$ podemos utilizar la Observación (2.2.1), y obtendremos los resultados análogos al caso $p = 0$, con los cambios correspondientes.

2.2.8. Propiedades implícitas

En esta sección examinamos brevemente los cambios de variable que llamamos implícitos (2.13):

$$|L| = |p + q - 1|, \quad |p| = |\alpha|, \quad |q| = |\beta|. \quad (2.73)$$

Es claro que en este caso tanto las propiedades de tipo Sturm como el propio cambio de variable dependen de los parámetros de la función, lo cual, salvo en casos particulares como $|p| = |\alpha|$ o $|q| = |\beta|$, dificulta la obtención de resultados de manera explícita. Además, como se verá más adelante, las expresiones obtenidas son más manejables en términos de p y q que en términos de α y β .

Haciendo uso de las propiedades de simetría que ya hemos utilizado anteriormente basta con considerar los casos $|L| = |p + q - 1|$ y $|p| = |\alpha|$, puesto que $|q| = |\beta|$ se sigue de este último con las sustituciones habituales.

Casos $|p| = |\alpha|$ y $|q| = |\beta|$

En términos de la variable $t = x/(1-x)$ la función $\Omega(x(t))$ y su derivada tienen la siguiente estructura:

$$\Omega(t) = \frac{1}{4}t^{-2p+1}(1+t)^{2p+2q-2} [(q^2 - \beta^2)t + D], \quad (2.74)$$

$$\Omega'(t) = \frac{1}{4}t^{-2p}(1+t)^{2p+2q-3} [q(q^2 - \beta^2)t^2 + \theta t + (1/2 - p)D], \quad (2.75)$$

donde

$$D = L^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 1 + 2(p + q - pq), \quad (2.76)$$

$$\theta = (1 - p)(q^2 - \beta^2) + (q - 1/2)D. \quad (2.77)$$

Fijos los valores de L , α , β y $p = \pm\alpha$, el coeficiente D cambia de signo en:

$$q_0 = \frac{L^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 1 + 2p}{2(p - 1)}, \quad (2.78)$$

lo cual dificulta el análisis. Sin embargo, si nos restringimos al caso $|q| \leq |\beta|$ entonces se cumple que $D > 0$, lo cual se sigue de las condiciones de oscilación (2.3). En estas circunstancias el comportamiento en $t = 0^+$ y $t = +\infty$ permite probar los siguientes resultados:

Teorema 2.2.15 *Las diferencias $\Delta z_k(\pm\alpha, q)$ satisfacen:*

1. Cuando $p \leq 1/2$, entonces $\Delta z_k(\pm\alpha, q) > \sqrt{\pi/\Omega(x_M)}$, donde x_M es el punto máximo en $(0, 1)$.
2. Cuando $p \geq 1/2$ y $q < 0$, o bien cuando $1/2 \leq p \leq 1$ y $0 < q \leq 1/2$, entonces $\Delta z_k(\pm\alpha, q)$ es creciente como función de k .

El primer caso se deduce del comportamiento en $t = 0^+$ y en $t = +\infty$ (véase el apéndice), y el segundo de los signos de los coeficientes de $\Omega'(t)$.

Cuando se cumple que $|p| = |\alpha|$ y $|q| = |\beta|$ entonces el análisis es particularmente sencillo, puesto que en este caso:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4}x^{1-2p}(1-x)^{1-2q}D, \quad (2.79)$$

donde D viene dado por (2.76), y la derivada es:

$$\Omega'(x) = \frac{1}{4}x^{-2p}(1-x)^{-2q}[(2p+2q-1)x + 1 - 2p]. \quad (2.80)$$

El resultado general recupera algunos casos del análisis realizado en el caso Szegő, $p = q = 1/2$:

Teorema 2.2.16 Cuando $|p| = |\alpha|$ y $|q| = |\beta|$ definimos:

$$K(p, q) = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \left(\frac{p-1/2}{p+q-1} \right)^{p-1/2} \left(\frac{q-1/2}{p+q-1} \right)^{q-1/2} \quad (2.81)$$

1. Si $p \geq 1/2$, $q \geq 1/2$ (excluyendo el caso en el que ambos son iguales a $1/2$), entonces $\Delta z_k(p, q) < K(p, q)$.
2. Si $p \leq 1/2$, $q \leq 1/2$ (excluyendo el caso en el que ambos son iguales a $1/2$), entonces $\Delta z_k(p, q) > K(p, q)$.
3. Si $p = 1/2$ y $q = 1/2$, entonces $\Delta z_k(p, q) = K(1/2, 1/2) = 2\pi/\sqrt{D}$.

En los dos primeros casos se entiende que los casos $\Delta z_k(1/2, q)$ y $\Delta z_k(p, 1/2)$ se obtienen tomando los límites correspondientes.

Teorema 2.2.17 Cuando $|p| = |\alpha|$ y $|q| = |\beta|$ definimos:

1. Si $p \geq 1/2$, $q \leq 1/2$ (excluyendo el caso en el que ambos son iguales a $1/2$), entonces $\Delta z_k(p, q)$ es decreciente en k .
2. Si $p \leq 1/2$, $q \geq 1/2$ (excluyendo el caso en el que ambos son iguales a $1/2$), entonces $\Delta z_k(p, q)$ es creciente en k .

Caso $|L| = |1 - p - q|$

En este caso las funciones son, ya en términos de la variable t :

$$\Omega(t) = \frac{1}{4}t^{-2p}(1+t)^{2p+2q-1}((q^2 - \beta^2)t + p^2 - \alpha^2), \quad (2.82)$$

$$\Omega'(t) = \frac{1}{4}t^{-2p-1}(1+t)^{2p+2q-2}(q(q^2 - \beta^2)t - \Theta t - p(p^2 - \alpha^2)), \quad (2.83)$$

donde

$$\Theta = (p - 1/2)(q^2 - \beta^2) - (q - 1/2)(p^2 - \alpha^2).$$

En este caso el análisis es especialmente complicado por la dependencia respecto a los parámetros, y por esa razón no insistiremos en este tipo de propiedades.

2.3. Transformaciones LG de la ecuación de Kummer

2.3.1. Cambios de variable admisibles

Recordamos la ecuación hipergeométrica confluyente, o ecuación de Kummer (1.28):

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0 \quad (2.84)$$

Las condiciones de oscilación se obtienen de nuevo a partir de varios sistemas de DDEs en la referencia [34], y son las siguientes:

$$a < 0, \quad c - a > 1. \quad (2.85)$$

En la notación correspondiente a los polinomios de Laguerre, $n = -a$, $\alpha = c - 1$ las condiciones de oscilación son:

$$n > 0, \quad n + \alpha > 0. \quad (2.86)$$

En lo sucesivo vamos a utilizar también la notación $L = 2n + \alpha + 1$.

Como se expone en [11] una familia de cambios de variable dentro de las condiciones expuestas anteriormente es la siguiente:

$$z(x) = \frac{x^m}{m}, \quad m \neq 0, \quad (2.87)$$

$$z(x) = \log(x), \quad m = 0. \quad (2.88)$$

En estas condiciones la función $\Omega(z(x))$ resultante es:

$$\Omega(z(x)) = -\frac{1}{4}x^{-2m}(x^2 - 2Lx + \alpha^2 - m^2) \quad (2.89)$$

La derivada es:

$$\Omega'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2m-1}[(1-m)x^2 + (2m-1)Lx - m(\alpha^2 - m^2)] \quad (2.90)$$

Con toda la información recogida en el Apéndice podemos enunciar el resultado principal de esta sección. Previamente establecemos la siguiente notación:

$$x_e = \frac{m-1/2}{m-1}L - \frac{\sqrt{\Delta}}{m-1}, \quad (2.91)$$

si $m \neq 1$, donde Δ es:

$$\Delta = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 L^2 + m(1-m)(\alpha^2 - m^2) \quad (2.92)$$

Si $m = 1$ entonces el valor de x_e viene dado por la simplificación correspondiente:

$$x_e = \frac{\alpha^2 - 1}{L}. \quad (2.93)$$

El valor de la función en este punto es:

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{4}x_e^{-2m}(1-m)^{-1} [Lx_e - \alpha^2 + m^2], \quad (2.94)$$

cuando $m \neq 1$, y

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{4} \frac{L^2 - \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \quad (2.95)$$

cuando $m = 1$. El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.3.1 *Sea la función $\Omega(z(x))$ dada por (2.89), y supongamos que se verifican las condiciones (2.85). Entonces, salvo si $|\alpha| < |m|$ y $m \in (0, 1/2)$ simultáneamente, una de las dos situaciones siguientes se da independientemente de n :*

1. *La función $\Omega(z(x))$ es estrictamente decreciente cuando es positiva.*
2. *La función $\Omega(z(x))$ tiene un único extremo absoluto para $x > 0$ y es un máximo x_e tal que $\Omega(x_e) > 0$.*

Como consecuencia de este resultado y de los teoremas de Sturm ya enunciados, podemos dar el siguiente teorema sobre los ceros reales de las funciones de Kummer. La notación que utilizaremos para las diferencias es la siguiente, similar a la que empleamos en el caso de las funciones de Gauss. Cuando $m \neq 0$:

$$\Delta z_k(m) = z(x_{k+1}) - z(x_k) = \frac{x_{k+1}^m - x_k^m}{m}. \quad (2.96)$$

Cuando $m = 0$ tomamos el límite correspondiente:

$$\Delta z_k(0) = \lim_{m \rightarrow 0} \Delta z_k(m) = \log \left(\frac{x_{k+1}}{x_k} \right). \quad (2.97)$$

Teorema 2.3.2 *Sean $x_k < x_{k+1} < x_{k+2}$ ceros positivos consecutivos de $y(x)$, solución de la ecuación de Kummer (1.28), con las condiciones de oscilación (2.85). Entonces:*

1. *Si $|\alpha| \leq |m|$ y $m \geq 1/2$ entonces $\Delta z_k(m)$ es creciente como función del parámetro k .*
2. *Si $|\alpha| > m$, o bien si $|\alpha| = |m|$ y $m \leq 1/2$, o bien si $|\alpha| < |m|$ y $m < 0$ entonces:*

$$\Delta z_k(m) > \frac{\pi}{\sqrt{\Omega(x_e)}} = 2\pi x_e^m \sqrt{\frac{1-m}{Lx_e - \alpha^2 + m^2}}, \quad m \neq 1 \quad (2.98)$$

Cuando $m = 1$:

$$\Delta z_k(1) > \lim_{m \rightarrow 1} \frac{\pi}{\sqrt{\Omega(x_e)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{L^2 - (\alpha^2 - 1)}} \quad (2.99)$$

2.3.2. Casos no globales

Al igual que con las funciones de Gauss, existe una región de parámetros donde no es posible establecer propiedades globales de tipo Sturm, cuando $|\alpha| < |m|$ y $0 < m < 1/2$. Una vez más, el comportamiento de la función $\Omega(x)$ depende del signo del discriminante (2.92):

$$\Delta = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 L^2 + m(1-m)(\alpha^2 - m^2) \quad (2.100)$$

Cuando $\Delta < 0$ la derivada no tiene ceros reales, y la función $\Omega(x)$ es monótona. Cuando $\Delta > 0$ tenemos además de x_e el siguiente cero:

$$x_e^* = \frac{m - 1/2}{m - 1}L + \frac{\sqrt{\Delta}}{m - 1}. \quad (2.101)$$

Claramente $x_e^* < x_e$, y además $x_e^* > 0$. Por otro lado $\Omega(x_e) > 0$ y $\Omega(x_e^*) > 0$, teniendo en cuenta (2.94). Al haber dos extremos relativos donde la función es positiva, y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Omega(x) = -\infty$ no es posible establecer propiedades globales de tipo Sturm. Una vez más estas dos situaciones se pueden explicar en términos de la variable n , como se puede ver en el apéndice, puesto que cuando n es grande $\Delta = \mathcal{O}(n^2)$.

2.3.3. Casos particulares

A continuación vamos a considerar tres casos particulares, que aparecen analizados en [11], $m = 1$, $m = 1/2$ y $m = 0$. En cada caso aplicaremos los teoremas (2.3.1) y (2.3.2) y enunciaremos los resultados correspondientes en términos de la variable x .

Caso $m = 1$

En este caso el cambio de variable es trivial: $z(x) = x$, y consecuentemente:

$$\Omega(z(x)) = -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{2L}{x} + \frac{\alpha^2 - 1}{x^2} \right]. \quad (2.102)$$

En este caso:

Teorema 2.3.3 *Sea $y(x)$ solución de la ecuación de Kummer (1.28), con las condiciones de oscilación (2.85), y $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ ceros positivos consecutivos de $y(x)$. Supongamos que se verifican las condiciones (2.85), y sea $\Omega(z(x))$ dada por (2.102) y x_e según (2.93):*

1. Si $|\alpha| \leq 1$ entonces $\Delta z_k(1)$ es creciente como función de k , es decir:

$$x_k < \frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{2}. \quad (2.103)$$

2. Si $|\alpha| > 1$ entonces $\Delta z_k(1) > \pi/\sqrt{\Omega(x_e)}$, es decir:

$$\Delta z_k(1) = x_{k+1} - x_k > 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{L^2 - (\alpha^2 - 1)}}. \quad (2.104)$$

Estos resultados son directamente aplicables a los ceros de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Análogamente, en virtud de las relaciones (1.43), (1.44) y (1.45) los ceros de los polinomios de Hermite verifican:

$$x_k^2 < \frac{x_{k+1}^2 + x_{k-1}^2}{2}. \quad (2.105)$$

Caso $m = 1/2$

En este caso el cambio de variable es $z(x) = 2\sqrt{x}$, y consecuentemente:

$$\Omega(z(x)) = -\frac{1}{4} \left[x - 2L + \frac{\alpha^2 - 1/4}{x} \right]. \quad (2.106)$$

Podemos calcular explícitamente el punto x_e en este caso:

$$x_e = \sqrt{\alpha^2 - 1/4}, \quad (2.107)$$

así como el valor de la función en dicho punto:

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{2} \left[L - \sqrt{\alpha^2 - 1/4} \right]. \quad (2.108)$$

La aplicación de (2.3.1) y (2.3.2) nos da lo siguiente:

Teorema 2.3.4 Sea $y(x)$ solución de la ecuación de Kummer (1.28), con las condiciones de oscilación (2.85), y $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ ceros positivos consecutivos de $y(x)$. Supongamos que se verifican las condiciones (2.85), y sea $\Omega(z(x))$ dada por (2.106) y x_e según (2.107):

1. Si $|\alpha| \leq 1/2$ entonces $\Delta z_k(1/2)$ es decreciente como función de k , de modo que:

$$\sqrt{x_k} < \frac{\sqrt{x_{k+1}} + \sqrt{x_{k-1}}}{2}. \quad (2.109)$$

2. Si $|\alpha| > 1/2$ entonces $\Delta z_k(1/2) > \pi/\sqrt{\Omega(x_e)}$, de manera que:

$$\Delta z_k(1/2) > \frac{\pi}{\sqrt{2(L - (\alpha^2 - 1/4))}}. \quad (2.110)$$

Estos resultados son directamente aplicables a los ceros de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. En el caso de los polinomios de Hermite, los ceros verifican:

$$x_k < \frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{2}. \quad (2.111)$$

Es interesante señalar que en el caso $|\alpha| = 1/2$ la función $\Omega(x)$ es decreciente para $x > 0$, pero además el valor en $x = 0$ es un máximo, de modo que tenemos información adicional: la cota correspondiente se obtiene sustituyendo $|\alpha| = 1/2$ en la expresión (2.110). Por tanto:

Corolario 2.3.1 *En las condiciones del teorema (2.3.4), si $|\alpha| = 1/2$ se cumple además que:*

$$\Delta z_k(1/2) > \frac{\pi}{\sqrt{2L}}. \quad (2.112)$$

Estos resultados son directamente aplicables a los ceros de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. En el caso de los polinomios de Hermite $H_n(x)$ tenemos:

$$x_{k+1} - x_k > \frac{\pi}{2(n+1)}. \quad (2.113)$$

Este resultado aparece recogido en la referencia clásica [80], fórmula (6.31.21).

Caso $m = 0$

Ahora el cambio de variable es $z(x) = \log(x)$, y consecuentemente:

$$\Omega(z(x)) = -\frac{1}{4} [x^2 - 2Lx + \alpha^2], \quad (2.114)$$

En este caso el valor de x_e es obviamente:

$$x_e = \sqrt{\alpha^2 - 1/4}, \quad (2.115)$$

y el valor de la función en dicho punto:

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{4} [L^2 - \alpha^2]. \quad (2.116)$$

La aplicación de (2.3.1) y (2.3.2) nos da lo siguiente:

Teorema 2.3.5 *Sea $y(x)$ solución de la ecuación de Kummer (1.28), con las condiciones de oscilación (2.85), y $\dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ ceros positivos consecutivos de $y(x)$. Supongamos que se verifican las condiciones (2.85), y sea $\Omega(z(x))$ dada por (2.114) y x_e según (2.115). Independientemente de los valores de n y α se cumple que $\Delta z_k(0) > \pi/\sqrt{\Omega(x_e)}$, de manera que:*

$$\Delta z_k(0) > \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{L^2 - \alpha^2}}\right). \quad (2.117)$$

Nuevamente estos resultados son directamente aplicables a los ceros de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. En el caso de los polinomios de Hermite $H_n(x)$ obtenemos:

$$\Delta z_k(0) = \frac{x_{k+1}}{x_k} > \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{L^2 - \alpha^2}}\right). \quad (2.118)$$

2.4. Transformaciones LG de la ecuación de Bessel

En esta última sección estudiaremos la ecuación diferencial (1.53):

$$xy''(x) + cy'(x) + y(x) = 0, \quad (2.119)$$

una de cuyas soluciones es la función hipergeométrica ${}_0F_1(-; c; -x)$. Elegimos como variable $-x$ para poder relacionar estas funciones con las funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$, donde $c = \nu + 1$. En efecto, reescribiendo (1.54):

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(-; \nu + 1; -\frac{x^2}{4}\right) \quad (2.120)$$

Como es sabido, las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ tienen infinitos ceros reales positivos, de modo que las soluciones de (1.53) también presentan esta propiedad.

Si consideramos la misma familia de cambios de variable que en la ecuación de Kummer: $z'(x) = x^m$ si $m \neq 0$ y $z(x) = \log(x)$ si $m = 0$, las funciones resultantes son las siguientes:

$$\Omega(z(x)) = \frac{1}{4}x^{-2m} [4x + m^2 - \nu^2] \quad (2.121)$$

$$\Omega'(z(x)) = \frac{1}{2}x^{-2m-1} [(2 - 4m)x - m(m^2 - \nu^2)] \quad (2.122)$$

Para analizar el comportamiento de estas funciones hacemos notar primeramente que pueden tener a lo más un cero cuando $x > 0$. El cero de la derivada es:

$$x_e = \frac{m(m^2 - \nu^2)}{2(1 - 2m)}, \quad (2.123)$$

y en ese punto la función vale:

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{2x_e^{2m-1}}. \quad (2.124)$$

Lema 2.4.1 *Se cumple que $x_e > 0$ si:*

1. $|\nu| < |m|$ y $m \in (0, 1/2)$, o bien si:
2. $|\nu| > |m|$ y $m \in (-\infty, 0) \cup (1/2, \infty)$.

En el primer caso x_e es un mínimo de $\Omega(x)$, mientras que en el segundo se trata de un máximo.

Lema 2.4.2 *Cuando $x > 0$ la derivada $\Omega'(x)$ es:*

1. *negativa si $|\nu| < |m|$ y $m > 1/2$.*
2. *positiva si $|\nu| > |m|$ y $m \in (0, 1/2)$ o bien si $|\nu| < |m|$ y $m < 0$.*

Teniendo en cuenta estos lemas, así como los límites cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow +\infty$, no es difícil verificar el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1 *Sea la función $\Omega(x)$ dada por (2.121), entonces se da una de las siguientes situaciones:*

- (1) *La función $\Omega(z(x))$ tiene un máximo $x_M > 0$ y se cumple que $\Omega(z(x_M)) > 0$.*
- (2) *La función $\Omega(z(x))$ tiene un mínimo $x_m > 0$ y se cumple que $\Omega(z(x_m)) > 0$.*
- (3) *La función $\Omega(z(x))$ es estrictamente creciente cuando $x > 0$.*
- (4) *La función $\Omega(z(x))$ es estrictamente decreciente cuando $x > 0$.*
- (5) *La función $\Omega(z(x))$ es constante.*

Teorema 2.4.2 *Sea $y(x)$ una solución no trivial de la ecuación diferencial (1.53), $y z(x)$ un cambio de variable tal que $z'(x) = x^m$ si $m \neq 0$ y $z(x) = \log(x)$ si $m = 0$. Sean $x_k < x_{k+1} < x_{k+2}$ ceros consecutivos de $y(x)$ en orden creciente. Entonces:*

1. *Si $m \leq 0$, o bien si $0 < m \leq 1/2$ y $|\nu| \geq |m|$ (excluyendo el caso $|\nu| = |m| = 1/2$) entonces las diferencias $\Delta z_k(m)$ son decrecientes como función de k .*
2. *Si $m \geq 1/2$ y $|\nu| \leq |m|$ (excluyendo el caso $|\nu| = |m| = 1/2$) entonces las diferencias $\Delta z_k(m)$ son crecientes como función de k .*
3. *Si $0 < m < 1/2$ y $|\nu| < |m|$ entonces $\Delta z_k(m) < \pi/\sqrt{\Omega(x_e)}$.*
4. *Si $m > 1/2$ y $|\nu| > |m|$ entonces $\Delta z_k(m) > \pi/\sqrt{\Omega(x_e)}$.*

Cuando $|\nu| = |m| = 1/2$ entonces $\Delta z_k(m) \equiv \pi$.

Podemos extraer de aquí información sobre los ceros de las funciones de Bessel $J_\nu(x)$. Si $m = 1/2$ entonces recuperamos un resultado conocido (véase por ejemplo [88]):

Corolario 2.4.1 *Los ceros $x_{\nu,k}$ de la función de Bessel $J_\nu(x)$ verifican:*

- *Si $\nu < 1/2$ entonces $x_{\nu,k+1} - x_{\nu,k} < \pi$, y además $\Delta^2 x_{\nu,k} > 0$.*
- *Si $\nu = 1/2$ entonces $x_{\nu,k+1} - x_{\nu,k} = \pi$.*
- *Si $\nu > 1/2$ entonces $x_{\nu,k+1} - x_{\nu,k} > \pi$, y además $\Delta^2 x_{\nu,k} < 0$.*

Análogamente, con el cambio $z(x) = \log(x)$ obtenemos una propiedad demostrada en [74]:

Corolario 2.4.2 *Los ceros $x_{\nu,k}$ de la función de Bessel $J_\nu(x)$ verifican:*

$$x_{\nu,k}^2 > x_{\nu,k+1}x_{\nu,k-1}. \quad (2.125)$$

Esta propiedad es análoga al resultado probado en [77], acerca del entrelazado de ceros y extremos de las funciones de Bessel. Por último, con el cambio de variable $z(x) = x$:

Corolario 2.4.3 *Los ceros $x_{\nu,k}$ de la función de Bessel $J_\nu(x)$ verifican:*

■ Si $|\nu| \leq 1$ entonces:

$$x_{\nu,k}^2 < \frac{x_{\nu,k+1}^2 + x_{\nu,k-1}^2}{2}. \quad (2.126)$$

■ Si $|\nu| > 1$ entonces:

$$x_{\nu,k+1}^2 - x_{\nu,k}^2 > 4\pi\sqrt{\nu^2 - 1}. \quad (2.127)$$

2.5. Conclusiones y problemas relacionados

En este capítulo hemos analizado propiedades de tipo Sturm de los ceros reales de las funciones hipergeométricas de Gauss y Kummer. Estas propiedades se obtienen de manera sistemática por medio de transformaciones de Liouville-Green de las ecuaciones diferenciales de segundo orden correspondientes. Mediante ciertas restricciones en dichas transformaciones, que permiten que el problema sea analíticamente tratable, es posible obtener familias de cambios de variable que proporcionan resultados globales sobre los ceros de las funciones hipergeométricas, en el sentido de que las propiedades obtenidas se aplican a todos los ceros reales en un cierto intervalo de estudio.

Los cambios de variable que aparecen en las secciones 2.2.4, 2.2.7, 2.3.3 de este capítulo aparecen también en el contexto de las transformaciones de sistemas de ecuaciones difero-diferenciales de la forma (1.85). Recordemos que estos sistemas relacionan dos funciones hipergeométricas de una misma familia con sus derivadas:

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)y(x) + d(x)w(x) \\ w'(x) &= b(x)w(x) + e(x)y(x) \end{aligned} \quad (2.128)$$

Como ya comentamos anteriormente, es posible construir diferentes sistemas de este tipo a partir de una función dada y de las funciones contiguas correspondientes. Las transformaciones de estos sistemas por medio de normalizaciones y cambios de variable $z(x) = \int^x \sqrt{-d(t)e(t)}dt$ son análogas a las transformaciones de Liouville-Green que hemos analizado para las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Véase [34] para los diferentes ejemplos con funciones de Gauss, Kummer y Bessel.

Como se expone en [40, 41, 75], si los coeficientes de este sistema son funciones suficientemente regulares en (a, b) entonces es posible establecer propiedades de entrelazado de ceros de las funciones $y(x)$ y $w(x)$. En concreto [75], si el coeficiente $d(x)$ es continuo en un intervalo I donde $y(x)$ o $w(x)$ tienen al menos dos ceros entonces los ceros de $y(x)$ y $w(x)$ son simples, diferentes y están entrelazados

en I .

A partir de este resultado de entrelazado es posible obtener resultados de tipo Sturm, por ejemplo relaciones de distancias entre ceros de dos funciones diferentes de una misma familia $y(x)$ y $w(x)$. Algunos resultados de este tipo aparecen en [2]. Estas propiedades son aplicables a pares de funciones hipergeométricas de una misma familia que dependen de un cierto parámetro entero n y corresponden a distintos valores de dicho parámetro, por ejemplo, $y(x) = y_n(x)$ y $w(x) = y_{n\pm 1}(x)$. Algunos posibles temas de investigación en este contexto podrían ser:

- Propiedades de los ceros (en concreto monotonía de distancias entre ceros) en función de dicho parámetro entero n , por analogía con las propiedades de monotonía que se han estudiado en función de x .
- Posibles propiedades de entrelazado de ceros en el caso de que las funciones con $y(x) = y_n(x)$, $w(x) = y_{n-k}(x)$, $k > 1$. Con la información presentada en [60, 61] es posible calcular los coeficientes del sistema que nos relaciona $y_n(x)$ e $y_{n-k}(x)$ con sus derivadas a partir del sistema correspondiente a $y_n(x)$ e $y_{n-1}(x)$, el cual se puede obtener sin dificultad a partir de las referencias [1, 25].

Otro posible campo de estudio viene dado por el análogo discreto de los teoremas de Sturm. En lugar de una ecuación diferencial de segundo orden el problema se plantearía en términos de una ecuación en diferencias de segundo orden:

$$\Delta^2 y(x) + \Omega(x)y(x) = 0, \quad (2.129)$$

donde, como es habitual, $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$. El correspondiente teorema de Sturm aparece en [20, pág.321], así como en análogo de la transformación a forma normal de la ecuación en el caso de ecuaciones en diferencias. Este tipo de resultados podría explorarse en al menos dos direcciones:

- Las relaciones de recurrencia a tres términos de las funciones hipergeométricas son ecuaciones en diferencias de segundo orden en los parámetros. Por tanto cabe preguntarse si sería posible obtener propiedades de tipo Sturm en términos de los parámetros, en lugar de en la variable x .
- Existen funciones especiales importantes, como los polinomios clásicos de variable discreta (Charlier, Meixner, Kravchuk, Hahn), véase [67], que satisfacen ecuaciones de la forma (2.129). Este podría ser un enfoque interesante para el estudio de sus ceros reales.

Capítulo 3

Condicionamiento de recurrencias de tipo hipergeométrico

3.1. Antecedentes

Las relaciones de recurrencia a tres términos son una herramienta importante para la evaluación de funciones hipergeométricas, dentro de los diferentes métodos propuestos en la literatura. Véase el excelente resumen [57] para más detalles acerca del trabajo realizado para las diferentes familias de funciones. Además de los métodos directos de evaluación, como por ejemplo las series de potencias [26] o las representaciones integrales [33], las relaciones de recurrencia a tres términos nos permiten calcular funciones que dependen de uno o varios parámetros a partir de ciertos valores iniciales, y se pueden utilizar conjuntamente con los métodos antes descritos en un algoritmo general. Véase por ejemplo [37, 38] o [83]. Análogamente, las fracciones continuas asociadas constituyen un atractivo método de cálculo para cocientes de funciones hipergeométricas, y han sido y son objeto de estudio [10, 48, 56].

En este capítulo vamos a estudiar con más detalle aspectos numéricos del cálculo de funciones hipergeométricas y de cocientes de funciones hipergeométricas por medio de las relaciones de recurrencia a tres términos y fracciones continuas. Esta información será útil posteriormente en el desarrollo de métodos de punto fijo para la evaluación de ceros reales de estas funciones.

El comportamiento numérico tanto de las recurrencias como de las fracciones continuas asociadas se sigue de teoremas clásicos como los de Perron y Pincherle y del concepto fundamental de solución mínima y dominante de una recurrencia a tres términos. En este sentido las referencias clásicas son [31, 89].

Además de esta teoría general veremos ejemplos donde las propiedades numéricas

son diferentes de las esperadas debido a un cambio transitorio en el comportamiento de las soluciones. En concreto estudiaremos soluciones que, aun siendo dominantes en una cierta dirección de recurrencia, se comportan transitoriamente como soluciones mínimas. Esto conlleva comportamientos anómalos tanto en las recurrencias a tres términos como en las fracciones continuas asociadas en dichas regiones transitorias, y consecuentes pérdidas de precisión en los cálculos cuando se utiliza aritmética finita. El contenido de este capítulo se corresponde con la referencia original [13].

En este capítulo vamos a considerar relaciones de recurrencia a tres términos de la forma (1.73):

$$y_{n+1}(x) + b_n(x)y_n(x) + a_n(x)y_{n-1}(x) = 0, \quad (3.1)$$

donde n es un parámetro entero del que pueden depender uno o varios parámetros de la función. En el caso de las funciones hipergeométricas que estudiamos en este trabajo estas relaciones se cumplen siempre entre tres funciones de una misma familia cuyos parámetros difieren en números enteros, y además los coeficientes a_n y b_n son funciones racionales en los parámetros y en la variable x [87].

Observación 3.1.1 *Con el fin de no sobrecargar la notación, y dado que el estudio de este capítulo involucra fundamentalmente el parámetro n , en lo sucesivo no indicaremos la dependencia en x de las soluciones y coeficientes de (3.1), dándola por sobreentendida.*

3.2. Soluciones mínimas y dominantes

Recordamos la Definición 1.3.1: decimos que una solución f_n de (3.1) es **mínima** (o **recesiva**) en una determinada dirección de recurrencia si se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{g_n} = 0, \quad (3.2)$$

para cualquier solución g_n independiente de f_n . Diremos que la solución g_n es **dominante**. Asimismo, recordamos que el cálculo de una solución mínima por medio de la iteración (3.1) a partir de dos datos iniciales f_0 y f_1 es un problema inestable numéricamente, puesto que la solución generada $y_n = Af_n + Bg_n$ siempre contiene un término dominante que determina el comportamiento de la solución y_n cuando n es grande.

Por todo ello, el problema fundamental a la hora de utilizar las recurrencias con fines computacionales es determinar la existencia de soluciones mínimas, y en caso de haberlas identificarlas dentro del conjunto de soluciones de (3.1). La existencia de soluciones mínimas se puede determinar en ocasiones utilizando el teorema de Perron [82]:

Teorema 3.2.1 (Perron) *Sea la recurrencia (3.1) y supongamos que:*

$$a_n \sim an^\alpha, \quad b_n \sim bn^\beta, \quad ab \neq 0. \quad (3.3)$$

Sean λ_1 y λ_2 los ceros del polinomio característico $\phi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a$.

(1) Si $\beta > \alpha/2$ entonces la recurrencia (3.1) tiene dos soluciones independientes $y_{n,1}$ e $y_{n,2}$ tales que:

$$\frac{y_{n+1,1}}{y_{n,1}} \sim -bn^\beta, \quad \frac{y_{n+1,2}}{y_{n,2}} \sim -\frac{a}{b}n^{\alpha-\beta}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

(2) Si $\beta = \alpha/2$ y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ entonces la recurrencia (3.1) tiene dos soluciones independientes $y_{n,1}$ e $y_{n,2}$ tales que:

$$\frac{y_{n+1,1}}{y_{n,1}} \sim \lambda_1 n^\beta, \quad \frac{y_{n+1,2}}{y_{n,2}} \sim \lambda_2 n^\beta, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

(3) Si $\beta = \alpha/2$ y $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ entonces cualquier solución no trivial y_n de (3.1) satisface:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|y_n|}{(n!)^\beta} \right]^{1/n} = |\lambda_1|. \quad (3.6)$$

(4) Si $\beta < \alpha/2$ entonces cualquier solución no trivial y_n de (3.1) satisface:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|y_n|}{(n!)^{\alpha/2}} \right]^{1/n} = \sqrt{|a|}. \quad (3.7)$$

En los casos (1) y (2) la solución $y_{n,2}$ es mínima, mientras que en los casos (3) y (4) es teorema no es concluyente acerca de la existencia de soluciones mínimas de la recurrencia.

En los casos (1) y (2) es posible enunciar un corolario para la recurrencia cuando $n \rightarrow -\infty$. Si reescribimos la recurrencia como:

$$y_{n-1} + \frac{b_n}{a_n} y_n + \frac{1}{a_n} y_{n+1} = 0, \quad (3.8)$$

podemos determinar si hay o no soluciones mínimas considerando el comportamiento de los coeficientes cuando $n \rightarrow -\infty$ y aplicando el teorema de Perron. Más concretamente:

Corolario 3.2.1 *Sea la recurrencia (3.1) y supongamos que:*

$$a_n \sim an^\alpha, \quad b_n \sim bn^\beta, \quad ab \neq 0. \quad (3.9)$$

Sean λ_1 y λ_2 las raíces del polinomio característico $\phi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a$.

- (1) Si $\beta > \alpha/2$ entonces la recurrencia (3.1) tiene dos soluciones independientes $y_{n,1}$ e $y_{n,2}$ tales que:

$$\frac{y_{n-1,1}}{y_{n,1}} \sim -\frac{1}{b}n^{-\beta}, \quad \frac{y_{n-1,2}}{y_{n,2}} \sim -\frac{b}{a}n^{\beta-\alpha}, \quad n \rightarrow -\infty. \quad (3.10)$$

- (2) Si $\beta = \alpha/2$ y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ entonces la recurrencia (3.1) tiene dos soluciones independientes $y_{n,1}$ e $y_{n,2}$ tales que:

$$\frac{y_{n-1,1}}{y_{n,1}} \sim \frac{1}{\lambda_2}n^{-\beta}, \quad \frac{y_{n-1,2}}{y_{n,2}} \sim \frac{1}{\lambda_1}n^{-\beta}, \quad n \rightarrow -\infty. \quad (3.11)$$

En ambos casos, la solución $y_{n,2}$ es mínima cuando $n \rightarrow -\infty$.

Por ejemplo, en las recurrencias de las funciones hipergeométricas de Gauss se cumple siempre que $\alpha = \beta = 0$. Una vez calculadas las raíces del polinomio característico λ_1 y λ_2 , si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ entonces existen las soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim \lambda_1, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} \sim \lambda_2, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

y la solución f_n es mínima. El corolario establece que existen dos soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \sim \frac{1}{\lambda_2}, \quad \frac{g_{n-1}}{g_n} \sim \frac{1}{\lambda_1}, \quad n \rightarrow -\infty, \quad (3.13)$$

y la solución f_n es mínima.

Además del teorema de Perron, la información asintótica que haya disponible sobre las soluciones permite identificar aquellas que son mínimas en cada caso. En la siguiente sección veremos el caso de las recurrencias para las funciones hipergeométricas de Gauss y confluentes.

3.3. Soluciones mínimas y dominantes de recurrencias hipergeométricas

En las referencias [31, 82, 89] se pueden encontrar resultados sobre soluciones mínimas para las recurrencias de funciones de Bessel, Legendre, Coulomb e hipergeométricas confluentes, y en [35, 36] se lleva a cabo un estudio exhaustivo en el caso de las funciones de Gauss. A continuación resumimos estos resultados.

3.3.1. Recurrencias de las funciones hipergeométricas de Gauss

Las funciones de Gauss ${}_2F_1(a + kn, b + ln; c + mn; x)$, $k, l, m = 0, \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$ son objeto de estudio en las referencias [35, 36]. No es necesario considerar todos

los posibles valores de k , l y m , puesto que la simetría de la función de Gauss en los parámetros a y b y las relaciones funcionales, como por ejemplo (1.13) y (1.14), permiten reducir el número de direcciones de recurrencia a cuatro [35], que llamamos casos básicos. Una vez llevado a cabo este paso, el problema es determinar regiones del plano complejo donde existen soluciones mínimas, y en caso de haberlas identificarlas en el conjunto de seis soluciones (1.7)–(1.12).

Las funciones de Gauss satisfacen relaciones de recurrencia (3.1) con la particularidad de que los coeficientes tienen límite finito (salvo quizá en los puntos singulares de la ecuación diferencial):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a. \quad (3.14)$$

Consecuentemente, el caso 2 del Teorema de Perron (que también se suele denominar Teorema de Poincaré) se puede aplicar, con $\alpha = \beta = 0$. En aquellas regiones en las que se verifica que $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico $\phi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a$, el teorema permite concluir la existencia de soluciones mínimas. Las curvas definidas por la condición $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ (donde el teorema no es concluyente) separan zonas donde el comportamiento de las soluciones puede ser diferente. Más aún, tienen la importante propiedad de que son las únicas curvas donde se puede producir un cambio de comportamiento de las soluciones (en otras palabras, en una región donde las raíces λ_1 y λ_2 son diferentes en módulo la solución mínima no cambia).

Como consecuencia de este resultado, en el análisis basta identificar una solución mínima en cada una de las regiones delimitadas por las curvas $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ para construir un par numéricamente satisfactorio (solución mínima y solución dominante) en cada caso. La identificación de la solución mínima dentro del conjunto de soluciones (1.7)–(1.12) se simplifica considerablemente si el estudio se lleva a cabo en entornos de los puntos singulares de la ecuación, $x = 0$, $x = 1$ y $x = \infty$, puesto que cerca de esos puntos el comportamiento de las funciones de Gauss suele ser bastante claro.

A modo de ejemplo vamos a ver el caso de la recurrencia (+ + +), cuyos coeficientes son:

$$a_n = \frac{(c+n)(c+n-1)}{x(x-1)(a+n)(b+n)}, \quad b_n = \frac{((a+b+2n-1)x - c - n + 1)(c+n)}{x(x-1)(a+n)(b+n)}. \quad (3.15)$$

Consecuentemente:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{x(x-1)}, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{2x-1}{x(x-1)}. \quad (3.16)$$

Las raíces del polinomio característico $\lambda^2 + b\lambda + a = 0$ son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{x}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1-x}. \quad (3.17)$$

Igualando ambas raíces se obtiene que $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ implica $x = 1/2$ (o bien la recta $\Re(z) = 1/2$ si consideramos que la variable de la función es compleja). Por tanto, cuando $x \neq 1/2$ existe una solución f_n dentro del conjunto (1.7)– (1.12) que es mínima respecto a la recurrencia (+ + +). Además dicha solución por el teorema de Perron satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1}{1-x}, \quad (3.18)$$

cuando $x < 1/2$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = -\frac{1}{x} \quad (3.19)$$

cuando $x > 1/2$. Con el fin de identificar la solución mínima del conjunto (1.7)– (1.12) en cada caso hacemos uso de la identidad (1.13). Si aplicamos esta transformación a la solución $y_1(x)$ (1.7) obtenemos:

$$y_{n,1}(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix}; x \right) = (1-x)^{c-a-b-n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c+n \end{matrix}; x \right) \quad (3.20)$$

Si utilizamos la propiedad de que la solución mínima no cambia cuando $x < 1/2$, podemos analizar la solución $y_{n,1}(x)$ en $x = 0$. Es claro entonces que esta función verifica la condición (3.18), y por tanto es la solución mínima cuando $x < 1/2$. Por otro lado, aplicamos la misma transformación a la solución $y_3(x)$ normalizada (1.9):

$$\begin{aligned} y_{n,3}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(c+n)}{\Gamma(a+b+n+1-c)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ a+b+n+1-c \end{matrix}; 1-x \right) \\ &= \frac{(-1)^n x^{1-c-n} \Gamma(c+n)}{\Gamma(a+b+n+1-c)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} b+1-c, a+1-c \\ a+b+n+1-c \end{matrix}; 1-x \right), \end{aligned}$$

y esta solución satisface la condición (3.19), analizando esta vez en $x = 1$, luego $y_{n,3}(x)$ es mínima cuando $x > 1/2$. Este análisis coincide con las propiedades de la fracción continua asociada a esta recurrencia, que aparece en [47] y luego recogida en [56].

En la referencia [36] se lleva a cabo un análisis similar de las cuatro recurrencias básicas. Resumimos aquí los resultados, y de acuerdo con el planteamiento de esta referencia, consideramos momentáneamente la variable de la función hipergeométrica como compleja z :

- Recurrencia (+ + 0). Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{(1 - \sqrt{z})^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{(1 + \sqrt{z})^2}. \quad (3.21)$$

La condición $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ se cumple cuando $z \leq 0$, en otro caso $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, de manera que en $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ existe una solución mínima.

- Recurrencia $(+ + -)$. Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda_1 = \frac{32(1+w)}{(3+w)^3}, \quad \lambda_2 = \frac{32(1-w)}{(3-w)^3}, \quad (3.22)$$

donde $w = \sqrt{1+8z}$. La correspondiente curva $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ en el plano complejo corta al eje real en el punto $x_0 = (-5 + 3\sqrt{3})/4$, de modo que tenemos una solución mínima cuando $-1/8 < x < x_0$ y otra cuando $x > x_0$.

- Recurrencia $(+ 0 -)$. Las raíces del polinomio característico en este caso son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{4z}{(1-z)^2}, \quad (3.23)$$

La correspondiente curva $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ en el plano complejo corta al eje real en los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, de modo que tenemos una solución mínima cuando $x < x_0$, otra cuando $x_0 < x < x_1$ y una tercera cuando $x > x_1$.

3.3.2. Recurrencias de las funciones hipergométricas confluentes

En el caso de las funciones hipergeométricas confluentes $\phi(a + kn; c + mn; x)$ vamos a considerar los casos $k, m = 0, \pm 1$ solamente. Esto reduce el número de recurrencias que tenemos que estudiar a ocho, a saber: $(0 +)$, $(0 -)$, $(+ +)$, $(- -)$, $(+ 0)$, $(- 0)$, $(+ -)$ y $(- +)$.

Para determinar las soluciones mínimas en cada caso la herramienta principal es una vez más el teorema de Perron, junto con información asintótica acerca de las soluciones y la fórmula (1.34):

$$U(a; c; x) := \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)} M(a; c; x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} M(a+1-c; 2-c; x), \quad (3.24)$$

que nos relaciona las funciones de primera y segunda especie. Es importante hacer notar que para que las funciones $M(a + kn; c + mn; x)$ y $U(a + kn; c + mn; x)$ satisfagan la misma recurrencia en una cierta dirección siempre es necesario añadir normalizaciones a partir de (3.24).

Del conjunto de ocho recurrencias, el estudio de soluciones es completo en los cinco primeros casos, $(0 +)$, $(0 -)$, $(+ +)$, $(- -)$ y $(+ 0)$. En el caso $(- 0)$ el teorema de Perron no es concluyente y no es sencillo obtener información asintótica, pero comprobaciones numéricas indican que no hay solución mínima, puesto que todas las soluciones se comportan de manera similar cuando n es grande. En los casos $(+ -)$ y $(- +)$ sí que hay solución mínima, pero el análisis asintótico es complicado y la identificación de soluciones se ha hecho también mediante pruebas numéricas.

En la siguiente tabla recopilamos toda la información:

Dirección	Mínima	Dominante
(+ +)	$f_n = \frac{1}{\Gamma(c+n)} M(a+n; c+n; x)$	$g_n = (-1)^n U(a+n; c+n; x)$
(- -)	$f_n = C_n M(a+1-c, 2-c+n, x)$	$g_n = \frac{1}{\Gamma(n+1-c)} U(a-n; c-n; x)$
(0 +)	$f_n = \frac{1}{\Gamma(c+n)} M(a; c+n; x)$	$g_n = \frac{1}{\Gamma(c+n-a)} U(a; c+n; x)$
(0 -)	$f_n = \frac{(-1)^n x^n}{\Gamma(2-c+n)} M(a+1-c+n; 2-c+n; x)$	$g_n = U(a; c-n; x)$
(+ -)	$f_n = D_n M(a+c+2n+1; 2-c+n; x)$	$g_n = M(a+n; c-n; x)$
(- +)	$f_n = M(a-n; c+n; x)$	$g_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(-a-c+2n+2)} U(a-n; c+n; x)$
(+ 0)	$f_n = U(a+n; c; x)$	$g_n = \frac{1}{\Gamma(a+n+1-c)} M(a+n; c; x)$
(- 0)	—	—

Las constantes son:

$$C_n = \frac{x^n \Gamma(1+n-a)}{\Gamma(2+n-c)\Gamma(1+n-c)}, \quad (3.25)$$

$$D_n = \frac{(-1)^n x^n \Gamma(a+c+2n+1)}{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+n)\Gamma(2-c+n)} \quad (3.26)$$

Los coeficientes de las recurrencias puede obtenerse en [1, Cap. 13]. Veamos cada uno de los casos con un poco más de detalle:

En la recurrencia (+ +) los coeficientes satisfacen:

$$a_n = -\frac{(c+n)(c+n-1)}{(a+n)x} \sim -\frac{n}{x}, \quad b_n = -\frac{(c+n)(1-c-n+x)}{(a+n)x} \sim \frac{n}{x}. \quad (3.27)$$

Por el teorema de Perron, caso (1), (obsérvese que se trata de un caso esencialmente distinto al de las funciones de Gauss) existen dos soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim 1, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} \sim \frac{n}{x}, \quad (3.28)$$

La función f_n es mínima cuando $n \rightarrow \infty$. Dos soluciones de la recurrencia son:

$$y_{n,1} = M(a+n; c+n; x), \quad y_{n,2} = (-1)^n \Gamma(c+n) U(a+n; c+n; x). \quad (3.29)$$

En este caso la información asintótica necesaria se puede encontrar en [84], donde se dan desarrollos de las funciones confluentes de primera y segunda especie, cuando $x \rightarrow \infty$, uniformemente válidos para $a > 0$ y con la condición de que $c - a = \mathcal{O}(1)$. Esto permite identificar la solución mínima $f_n = M(a+n; c+n; x)$.

En el caso $(- -)$ se aplica el Corolario 3.2.1 y existen dos soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim \frac{x}{n}, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} \sim 1, \quad (3.30)$$

y f_n es solución mínima cuando $n \rightarrow -\infty$. A partir de la fórmula (3.24) y utilizando la asintótica del caso $(+ +)$ se puede ver que la solución mínima viene dada por:

$$f_n = \frac{\Gamma(1+n-a)}{\Gamma(2+n-c)\Gamma(1+n-c)} x^n M(a+1-c, 2+n-c, x). \quad (3.31)$$

En la recurrencia $(0 +)$ los coeficientes son [1, 13.4.2]:

$$a_n = \frac{(c+n)(c+n-1)}{x(c+n-a)}, \quad b_n = \frac{(c+n)(1-c-n-x)}{x(c+n-a)}. \quad (3.32)$$

Dos soluciones son:

$$y_{n,1} = M(a; c+n; x), \quad y_{n,2} = \frac{\Gamma(c+n-a)}{\Gamma(c+n)} U(a; c+n; x). \quad (3.33)$$

Es claro que:

$$a_n \sim \frac{n}{x}, \quad b_n \sim -\frac{n}{x}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

de manera que según el teorema de Perron existen dos soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim 1, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} = -\frac{n}{x}, \quad (3.35)$$

y f_n es mínima. A partir de la expresión en serie de potencias de la función $M(a; c; x)$ se puede ver que $f_n = M(a; c+n; x)$. En el caso de la función $U(a; c+n; x)$ el comportamiento asintótico se puede ver en [25, 83], y se comprueba que efectivamente se trata de una solución dominante.

En la recurrencia $(0-)$ aplicamos el Corolario 3.2.1, y resulta que hay dos soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim \frac{x}{n}, \quad \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \sim 1, \quad (3.36)$$

y f_n es solución mínima cuando $n \rightarrow -\infty$. A partir de la información que hemos utilizado para la recurrencia $(++)$ [84] se puede identificar la solución mínima.

En el caso $(+-)$ los coeficientes de la recurrencia verifican:

$$a_n \sim -\frac{4x}{n}, \quad b_n \sim -1. \quad (3.37)$$

Según el teorema de Perron, existen dos soluciones independientes tales que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim -\frac{4x}{n}, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} \sim 1, \quad (3.38)$$

y una vez más f_n es mínima. En este caso la identificación de esta solución mínima mediante información asintótica no parece sencilla, pero numéricamente se observa que la solución mínima es:

$$f_n = \frac{(-1)^n x^n \Gamma(a+c+2n+1)}{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+n)\Gamma(2-c+n)} M(a+c+1+2n; 2-c+n; x). \quad (3.39)$$

En la recurrencia $(-+)$ los coeficientes verifican:

$$a_n \sim \frac{n}{4x}, \quad b_n \sim -\frac{n}{4x}. \quad (3.40)$$

Consecuentemente, aplicando el Corolario 3.2.1, existe una solución mínima tal que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim 1, \quad (3.41)$$

mientras que para las soluciones dominantes se cumple que:

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} \sim \frac{n}{4x}. \quad (3.42)$$

Una vez más la identificación de la solución mínima mediante información asintótica no parece fácil, pero numéricamente se observa que la solución mínima es:

$$f_n = \frac{(-1)^n x^n \Gamma(a+c+2n+1)}{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+n)\Gamma(2-c+n)} M(a+c+1+2n; 2-c+n; x). \quad (3.43)$$

La recurrencia $(+0)$ es esencialmente diferente de todas las demás puesto que corresponde a un caso distinto del teorema de Perron:

$$a_n = \frac{a+n-c}{a+n} \sim 1, \quad b_n = -\frac{2a+2n+x-c}{a+n} \sim -2. \quad (3.44)$$

Dos soluciones de esta recurrencia son:

$$y_{n,1} = \Gamma(1 + a + n - c) U(a + n, c, x), \quad y_{n,2} = M(a + n; c; x). \quad (3.45)$$

El teorema de Perron no da información concluyente en este caso, puesto que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, pero a partir de información asintótica de las soluciones [83], relacionada con las funciones de Bessel modificadas, se puede identificar la solución mínima $f_n = \Gamma(1 + a + n - c) U(a + n, c, x)$.

En el caso (-0) las funciones son oscilantes (recordemos del capítulo anterior que la condición $a < 0$ y suficientemente grande es signo de oscilación), y no hay soluciones mínimas. Al igual que en el caso $(+0)$, el teorema de Perron no es concluyente, pero ahora el análisis asintótico es complicado, y por ello el comportamiento de las soluciones se ha comprobado únicamente de manera numérica.

3.4. Fracciones continuas asociadas

Si f_n es una solución mínima de la recurrencia y g_n es dominante resulta que el cociente

$$r_n := \frac{f_n}{g_n} \quad (3.46)$$

decrece cuando $n \rightarrow \infty$, y crece cuando n decrece. Es decir, que la solución que es mínima en sentido de n creciente se comporta como dominante cuando n decrece, de modo que la recurrencia en sentido decreciente en n debería funcionar bien numéricamente para una solución que es mínima en sentido creciente de n .

Aplicar la recurrencia en sentido decreciente en n es equivalente a evaluar la fracción continua asociada a la recurrencia (3.1). Esta se construye como hemos indicado en el capítulo 1, siempre que las funciones $y_{n-1}, y_{n-2} \dots$ sean distintas de 0:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{-a_n}{b_n + \frac{y_{n+1}}{y_n}}. \quad (3.47)$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{-a_n}{b_n +} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1} +} \dots + \frac{-a_{n+m-1}}{b_{n+m-1} + \frac{y_{n+m}}{y_{n+m-1}}}. \quad (3.48)$$

La cuestión de la convergencia de esta fracción continua cuando $m \rightarrow \infty$ se resuelve por medio del teorema de Pincherle [31, 56]:

Teorema 3.4.1 (Pincherle) *Si $a_n \neq 0$, la fracción continua obtenida al iterar el proceso anterior converge si y solamente si la recurrencia (3.1) admite una solución mínima f_n , y en ese caso:*

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{-a_n}{b_n +} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1} +} \frac{-a_{n+2}}{b_{n+2} +} \dots, \quad (3.49)$$

suponiendo que $f_{n-1}, f_{n-2}, \dots \neq 0$

En este capítulo utilizaremos la siguiente notación:

$$H_n = \frac{-a_n}{b_n+} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1}+} \frac{-a_{n+2}}{b_{n+2}+} \cdots, \quad (3.50)$$

y nos referiremos a los aproximantes de la fracción continua como:

$$H_{n,m} := \frac{-a_n}{b_n+} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1}+} \frac{-a_{n+2}}{b_{n+2}+} \cdots \frac{-a_{n+m-1}}{b_{n+m-1}} \quad (3.51)$$

Cuando se realicen análisis de las fracciones continuas, normalmente n será un valor fijo para un cociente de soluciones determinado, y m será variable.

3.5. Soluciones transitoriamente mínimas

3.5.1. Motivación

En la referencia [32] se estudia la fracción continua asociada a la recurrencia correspondiente a las funciones de Kummer: $f_n = {}_1F_1(a+n; c+n; x)$. Esta función es solución mínima en la dirección $(++)$, pero la fracción continua aparentemente converge a un cociente diferente de f_n/f_{n-1} , de forma tanto más acusada cuanto mayor es la variable x .

Veamos a continuación un sencillo análisis de la fracción continua (3.50) (suponiendo convergencia de la misma):

$$H_n = \frac{-a_n}{b_n+} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1}+} \frac{-a_{n+2}}{b_{n+2}+} \cdots \quad (3.52)$$

Supongamos que $a_n < 0$:

- Si $b_n > 0$ entonces tanto los numeradores como los denominadores son positivos, y siguiendo un resultado elemental de la teoría de fracciones continuas los aproximantes, con la notación utilizada en (3.51), se entrelazan de la siguiente manera:

$$0 < H_{n,2} < H_{n,4} < H_{n,6} < \cdots < H_{n,5} < H_{n,3} < H_{n,1} \quad (3.53)$$

- Si $b_n < 0$ la fracción continua es equivalente [56] a:

$$H_n = \frac{a_n}{-b_n+} \frac{-a_{n+1}}{-b_{n+1}+} \frac{a_{n+2}}{-b_{n+2}+} \cdots \quad (3.54)$$

Ahora todos los numeradores (salvo el primero) y todos los denominadores vuelven a ser positivos. Obsérvese que es la misma fracción continua que en el caso $b_n > 0$, pero con el signo cambiado, de manera que los aproximantes se entrelazan de nuevo, pero esta vez son negativos:

$$H_{n,1} < H_{n,3} < H_{n,5} < \cdots < H_{n,6} < H_{n,4} < H_{n,2} < 0 \quad (3.55)$$

Supongamos ahora que los coeficientes b_n cambian de signo, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n < 0$ si $n < n_0$ y $b_n > 0$ si $n > n_0$. Si n_0 es impar entonces:

$$H_{n,1} < \dots < H_{n,n_0-2} < H_{n,n_0} < H_{n,n_0+1} < H_{n,n_0-1} < \dots < H_{n,2} < 0 \quad (3.56)$$

Si $b_{n_0} > 0$ entonces no es difícil comprobar que $H_{n,n_0+2} < H_{n,n_0}$, de manera que perdemos convergencia a la solución.

De manera similar podemos razonar si n_0 es par, y lo que ocurre entonces es que:

$$H_{n,1} < \dots < H_{n,n_0-1} < H_{n,n_0+1} < H_{n,n_0} < H_{n,n_0-2} < \dots < H_{n,2} < 0 \quad (3.57)$$

y se prueba que $H_{n,n_0+2} > H_{n,n_0}$ si $b_{n_0} > 0$.

El teorema de Pincherle, el ejemplo proporcionado por W. Gautschi y este razonamiento parecen sugerir que la fracción continua puede converger temporalmente a un cociente diferente al de soluciones mínimas. En otras palabras, hay soluciones dominantes g_n de la recurrencia que se comportan de forma temporal como soluciones mínimas, al menos en el caso en el que $a_n < 0$ y b_n cambia de signo.

Este tipo de fenómeno, que llamaremos **pseudoconvergencia** de la fracción continua, se presenta en diferentes contextos, incluyendo funciones de Bessel modificadas, las funciones hipergeométricas confluentes y las funciones hipergeométricas de Gauss, e influye de manera decisiva en el comportamiento numérico de las recurrencias y de las fracciones continuas asociadas, como hemos visto en los ejemplos del capítulo 1.

En las siguientes secciones llevaremos a cabo un análisis de la presencia de soluciones pseudomínimas en recurrencias a tres términos con la condición de que $a_n < 0$ a partir de un cierto valor $n > n_a$, y b_n cambia de signo una sola vez en un punto n_0 . Esquemáticamente:

	n_a n_0		
	----- ----- -----		
Signo de a_n	+	-	-
Signo de b_n	$-(+)$	$-(+)$	$+(-)$

Primeramente veremos que en este caso es posible dar información acerca del patrón de signos de las soluciones de la recurrencia (es decir, si el signo de una solución alterna con n o se mantiene constante). Este estudio incluye la solución mínima. Posteriormente, el análisis que llevamos a cabo se basa en los signos de los coeficientes de la recurrencia, a_n y b_n .

El hecho de que b_n cambie de positivo a negativo o al revés no es importante, porque si y_n es solución de una de las recurrencias entonces $(-1)^n y_n$ es solución

de la otra, y lo único que cambia es el patrón de signos de las soluciones. Esto está relacionado con la equivalencia de fracciones continuas que hemos visto en el ejemplo anterior cuando $b_n < 0$: podemos cambiar de signo los coeficientes b_n sin alterar los a_n , y el resultado es que la fracción continua cambia de signo (y por tanto cambia de signo el cociente de valores consecutivos de la solución f_n/f_{n-1}).

3.5.2. Patrones de signos de las soluciones de la recurrencia

Sea una recurrencia $y_{n+1} + b_n y_n + a_n y_{n-1} = 0$ tal que $a_n < 0$ para n suficientemente grande, b_n cambia de signo y existe una solución mínima f_n . Es claro entonces que $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$. En los casos en los que el teorema de Perron es concluyente acerca de la existencia de soluciones mínimas se puede determinar el patrón de signos de las soluciones:

- En el primer caso del teorema de Perron, si $b_n > 0$ para n suficientemente grande entonces $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$, y consecuentemente $-a/b > 0$ y $-b < 0$. De esa forma, la solución mínima tiene signo alternante (es decir, $f_n f_{n-1} < 0$ para n suficientemente grande), y la solución dominante tiene signo constante. Por el contrario, si $b_n < 0$ entonces $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 0$, y consecuentemente $-a/b < 0$ y $-b > 0$. La solución mínima tendrá signo constante y la solución dominante será alternante.
- En el segundo caso del teorema de Perron, las dos raíces del polinomio característico $\lambda^2 + b\lambda + a = 0$ son reales y tienen signos distintos, de modo que la solución mínima y la dominante tienen patrones de signos opuestos.

Por otro lado, no es complicado probar que el patrón de signos de las soluciones se mantiene a partir del punto n_0 donde el coeficiente b_n cambia de signo:

Teorema 3.5.1 *Sea la recurrencia $y_n + b_n y_{n-1} + a_n y_{n-2} = 0$ tal que $a_n < 0$ para $n > n_a$ y b_n sólo cambia de signo una vez en $n = n_0 > n_a$. Entonces, si $b_n < 0$ ($b_n > 0$) cuando $n > n_0$ y la solución mínima es alternada (de signo constante) para n suficientemente grande, entonces es alternada (de signo constante) para todo $n \geq n_0$.*

Demostración 3.5.1 *Consideremos por ejemplo el caso $b_n > 0$ para n grande. En este caso $y_{n-1} = -(y_{n+1} + b_n y_n)/a_n$, que es positivo cuando $n > n_0$ si y_n y y_{n+1} son positivas. Si el teorema de Perron es aplicable, la solución es positiva (o negativa) para n grande, lo que prueba el teorema.*

En este resultado aparece el punto de cambio de signo de b_n en relación con los patrones de signos de las soluciones. En la siguiente sección veremos que se puede relacionar también con las propiedades del cociente de soluciones:

$$R_n := |r_n| = \left| \frac{f_n}{g_n} \right|, \quad (3.58)$$

donde f_n es solución mínima y g_n es dominante.

Es claro que cuando las soluciones mínima y dominante se comportan de la manera esperada entonces R_n tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Vamos a analizar la presencia de comportamientos transitorios diferentes de los anunciados por los resultados asintóticos por medio de este cociente. En este sentido damos la siguiente

Definición 3.5.1 *Dada una recurrencia que admite una solución mínima f_n cuando $n \rightarrow +\infty$ y dado un número natural n_t , diremos que una solución dominante g_n es transitoriamente mínima si R_n es creciente cuando $n \leq n_t$ ($R_{n-1} < R_n$) y decreciente cuando $n \geq n_t + 1$ ($R_n > R_{n+1}$)*

3.5.3. Signos de los coeficientes de las recurrencias

El teorema principal de esta sección establece que si el patrón de signos de la solución mínima no cambia entonces el comportamiento transitorio se produce si y sólo si b_n cambia de signo, y que además el cambio de signo de b_n coincide con el cambio de tendencia de $R_n = |f_n/g_n|$.

Teorema 3.5.2 *Consideramos la recurrencia $y_{n+1} + b_n y_n + a_n y_{n-1} = 0$, donde $a_n < 0$. Sean f_n y g_n soluciones con diferentes patrones de signos (una de ellas de signo constante y la otra alternada). Si $R_n = |f_n/g_n|$ alcanza un máximo absoluto en el punto $n = n_0$ y es estrictamente monótona cuando $n \leq n_0$ y cuando $n \geq n_0$, entonces b_n tiene signos opuestos cuando $n \leq n_0 - 1$ y cuando $n \geq n_0 + 1$.*

Demostración 3.5.2 *Supongamos, por ejemplo, que f_n es alternada y que R_n alcanza un máximo en n_0 . Definimos:*

$$\Delta_n = \left| \frac{g_{n+1}}{g_n} \right| - \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \frac{g_{n+1}}{g_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n}. \quad (3.59)$$

Utilizando la recurrencia se obtiene:

$$\Delta_n + \lambda_n \Delta_{n-1} = -2b_n, \quad (3.60)$$

donde

$$\lambda_n \equiv a_n \frac{f_{n-1}}{f_n} \frac{g_{n-1}}{g_n} > 0.$$

Por hipótesis $R_{n-1} < R_n$ cuando $n \leq n_0$ y $R_n > R_{n+1}$ cuando $n \geq n_0$. Entonces:

$$0 < R_n - R_{n+1} = \left| \frac{f_n}{g_n} \right| - \left| \frac{f_{n+1}}{g_{n+1}} \right| = \left| \frac{f_n}{g_{n+1}} \right| \Delta_n, \quad (3.61)$$

de modo que $\Delta_n > 0$ cuando $n \geq n_0$. Con un cálculo análogo:

$$0 > R_{n-1} - R_n = \left| \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}} \right| - \left| \frac{f_n}{g_n} \right| = \left| \frac{f_{n-1}}{g_n} \right| \Delta_{n-1}, \quad (3.62)$$

de modo que $\Delta_n < 0$ si $n \leq n_0 - 1$. A partir de la ecuación (3.60) se obtiene que $b_n > 0$ si $n \leq n_0 - 1$ y $b_n < 0$ si $n \geq n_0 + 1$.

En lo sucesivo diremos que b_n (o cualquier otra función de n) cambia de signo en $n = n_0$ si el signo cuando $n \leq n_0$ (excluyendo $n = n_0$ cuando $b_{n_0} = 0$) y cuando $n \geq n_0 + 1$ son opuestos.

Teorema 3.5.3 *Consideramos la recurrencia $y_{n+1} + b_n y_n + a_n y_{n-1} = 0$ tal que para $n \geq n_a$ se cumple que $a_n < 0$ y que b_n cambia de signo en $n_0 > n_a + 1$. Supongamos que existe una solución f_n con un patrón de signos fijo para $n \geq n_a$, alternado si $b_n < 0$ para n suficientemente grande o constante si $b_n > 0$ para n suficientemente grande (f_n puede ser mínima). Consideramos las soluciones g_n (no mínimas) tales que:*

$$\frac{g_{n_0+1}}{g_{n_0}} = -\gamma \frac{f_{n_0+1}}{f_{n_0}}, \quad \gamma > 0,$$

y sea $R_n = |f_n/g_n|$. Entonces, para $n \geq n_a$ se cumple lo siguiente:

1. Si $\gamma > 1$ entonces $R_n < R_{n_0}$ si $n \neq n_0$, y $R_{n-1} < R_n$ si $n \leq n_0$.
2. Si $\gamma < 1$ entonces $R_n < R_{n_0+1}$ si $n \neq n_0 + 1$, y $R_n > R_{n+1}$ si $n \geq n_0 + 1$.
3. Si $\gamma = 1$ entonces $R_n < R_{n_0} = R_{n_0+1}$ si $n \neq n_0, n_0 + 1$, $R_{n-1} < R_n$ si $n \leq n_0$ y $R_n > R_{n+1}$ si $n \geq n_0 + 1$.

Demostración 3.5.3 *Consideremos el caso $b_n < 0$ para n suficientemente grande (por tanto f_n tiene signo alternado). Es claro que basta estudiar el caso de valores iniciales:*

$$G_0 \equiv (g_{n_0}, g_{n_0+1}) = (|f_{n_0}|, \gamma |f_{n_0+1}|) \quad (3.63)$$

en el primer caso y

$$G_0 = (|f_{n_0}|, \frac{1}{\gamma} |f_{n_0+1}|) \quad (3.64)$$

en el segundo.

Analizaremos la primera posibilidad, la segunda y la tercera se obtienen de forma análoga. Consideramos la construcción de la solución $y_n = g_n - f_n$, que, dado G_0 , tiene valores iniciales: $y_{n_0} \geq 0$, $y_{n_0+1} \geq 0$ (no ambos iguales a 0). La recurrencia progresiva

$$y_{n+1} = -b_n y_n - a_n y_{n-1}$$

para $n \geq n_0 + 1$ da valores positivos de y_n , $n \geq n_0 + 2$, puesto que $a_n < 0$, $b_n < 0$ si $n \geq n_0 + 1$. Similarmente, la solución $y_n = g_n + f_n$ es también positiva. Por lo tanto $g_n - f_n > 0$ y $g_n + f_n > 0$ cuando $n \geq n_0 + 2$, de modo que $|f_n| < g_n = |g_n|$ cuando $n > n_0$ (y también cuando $n = n_0 + 1$ por la definición de g_{n_0}).

Si ahora consideramos la recurrencia hacia atrás:

$$y_{n-1} = -\frac{1}{a_n}(b_n y_n + y_{n+1}),$$

es claro que $g_n - f_n > 0$ y que $g_n + f_n > 0$ cuando $n \leq n_0 - 1$. Por lo tanto $|f_n| < |g_n|$ si $n < n_0$. De esta forma $R_n = |f_n/g_n| < 1 = R_{n_0}$ cuando $n \neq n_0$, lo que completa la prueba del primer caso.

Además, debido a que $R_n < R_{n_0}$ cuando $n < n_0$, se tiene en particular que

$$\left| \frac{g_{n_0}}{g_{n_0-1}} \right| < \left| \frac{f_{n_0}}{f_{n_0-1}} \right|.$$

Por ello podemos repetir el mismo argumento utilizado antes y obtenemos que $R_n < R_{n_0-1}$, $n < n_0 - 1$. Por inducción se sigue que $R_{n-1} < R_n$, $n \leq n_0$.

Cuando el teorema de Perron proporciona información acerca de la existencia de soluciones mínimas, la función f_n del teorema anterior es necesariamente mínima, puesto que el resto de soluciones (todas ellas dominantes) tienen el mismo patrón de signos asintóticamente.

En esta sección hemos proporcionado condiciones en términos de los coeficientes a_n y b_n para detectar la presencia de soluciones transitoriamente mínimas en el caso de recurrencias en las que el coeficiente a_n es negativo para $n > n_a$ y b_n cambia de signo en un punto $n_0 > n_a$. En ejemplos posteriores veremos que la condición sobre a_n se puede relajar, pidiendo solamente que dicho coeficiente sea negativo en torno al punto n_0 .

3.5.4. Estimación del error para la fracción continua

En esta sección vamos a realizar una estimación de la precisión alcanzable en el cálculo con la fracción continua asociada a la recurrencia a tres términos, tanto en la zona de convergencia propiamente dicha como en la zona transitoria.

Como ya hemos visto anteriormente, si $y_n, y_{n-1} \neq 0$ entonces:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{-a_n}{b_n + \frac{y_{n+1}}{y_n}} \quad (3.65)$$

Iterando este esquema, el aproximante m -ésimo $H_{n,m}$ de la fracción continua (3.50) es igual al cociente de soluciones y_n/y_{n-1} que se obtiene aplicando la recurrencia en dirección de n decreciente con valores iniciales:

$$y_{n+m} = 0, \quad y_{n+m-1} = 1. \quad (3.66)$$

Fijamos n , y definimos $N = n + m$. Dado un par de soluciones independientes de la recurrencia, $\{f_n, g_n\}$, $f_n, g_n \neq 0$, podemos escribir

$$y_N = \alpha f_N + \beta g_N = 0, \quad y_{N-1} = \alpha f_{N-1} + \beta g_{N-1} = 1. \quad (3.67)$$

Como $\{f_n, g_n\}$ es un par independiente, podemos resolver este sistema en términos de α y β :

$$\alpha = \frac{g_N}{f_{N-1}g_N - f_N g_{N-1}}, \quad \beta = -\frac{f_N}{f_{N-1}g_N - f_N g_{N-1}} \quad (3.68)$$

Consecuentemente el m -ésimo aproximante de la fracción continua $H_n = f_n/f_{n-1}$ es:

$$H_{n,m} = \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\alpha f_n + \beta g_n}{\alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1}} = \frac{g_N f_n - f_N g_n}{g_N f_{n-1} - f_N g_{n-1}} = \frac{f_n - r_N g_n}{f_{n-1} - r_N g_{n-1}}, \quad (3.69)$$

donde $r_N := f_N/g_N$.

De esta forma, si $r_N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow +\infty$ (es decir, si f_n es solución mínima) la fracción continua aproxima efectivamente el cociente f_n/f_{n-1} . Análogamente, si $r_N \rightarrow \infty$ cuando $N \rightarrow \infty$ (es decir, si g_n es solución mínima) la fracción continua aproxima el cociente g_n/g_{n-1} .

Intuitivamente podemos deducir que si r_N inicialmente crece, alcanza un máximo y después decrece entonces la fracción continua aproxima inicialmente el cociente g_n/g_{n-1} y después f_n/f_{n-1} . Esto coincide con el estudio que hemos realizado previamente y con los resultados de los experimentos numéricos.

Podemos calcular el error relativo cometido al aproximar el cociente de soluciones mínimas f_n/f_{n-1} utilizando $H_{n,m}$:

$$\epsilon_r^f(n, m) := 1 - H_{n,m} \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{r_N/r_n - r_N/r_{n-1}}{1 - r_N/r_{n-1}} \quad (3.70)$$

Es importante señalar que $r_N/r_{n-1} \neq 1$ puesto que las soluciones f_n y g_n son independientes. Si $|r_N/r_{n-1}|$ es pequeño el error $|\epsilon_r^f(n, m)|$ tiende a 0, que es lo esperable, y evidentemente cuando $r_N \rightarrow 0$ tenemos convergencia real a f_n/f_{n-1} cuando $N \rightarrow \infty$.

Si $r_N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow +\infty$ pero inicialmente r_N crece (por ejemplo $r_N \gg r_n$ para un cierto N) entonces la fracción continua aproxima el cociente de soluciones dominantes g_n/g_{n-1} temporalmente. En este caso diremos que g_n es una solución *transitoriamente mínima* o *pseudomínima*.

El error relativo en esta región de pseudoconvergencia es:

$$\epsilon_r^g(n, m) = \frac{r_n}{r_N} \epsilon_r^f(n, m) = \frac{1 - r_n/r_{n-1}}{1 - r_N/r_{n-1}}. \quad (3.71)$$

Por lo tanto, si $|r_N/r_{k-1}|$ es grande el error en la zona pseudoconvergente $|\epsilon_r^g(n, m)|$ será pequeño.

Combinando estas definiciones con los criterios de signos que hemos visto para las soluciones y para los coeficientes de la recurrencia podemos enunciar el siguiente resultado general:

Teorema 3.5.4 *Sea la recurrencia $y_{n+1} + b_n y_n + a_n y_{n-1} = 0$, tal que $a_n < 0$ y b_n cambia de signo en n_0 . Sea f_n solución mínima con un patrón fijo de signos para $n \geq n_a$ ($n_a < n_0 - 1$), y g_n una segunda solución independiente tal que $g_{n_0} f_{n_0+1} + g_{n_0+1} f_{n_0} = 0$. Sea k tal que $n_a < k < n_0$, $|\epsilon_r^f(k, m)|$ el error relativo del m -ésimo aproximante de la fracción continua respecto al cociente f_k/f_{k-1} , y $|\epsilon_r^g(k, m)|$ el error relativo respecto a g_k/g_{k-1} .*

Sea $n_k \in \mathbb{N}$ el único valor mayor que n_0 tal que $R_n/R_k - 1$ cambia de signo en $n = n_k$. Entonces:

1. *Si $m < n_k - k$, $|\epsilon_r^g(k, m)| < |\epsilon_r^f(k, m)|$.*
2. *Si $m > n_k - k$, $|\epsilon_r^f(k, m)| < |\epsilon_r^g(k, m)|$.*

El error más pequeño en la zona pseudoconvergente se puede acotar de la siguiente forma:

$$\min_m |\epsilon_r^g(k, m)| \leq \frac{R_k + R_{k-1}}{R_{n_0} - R_{k-1}}. \quad (3.72)$$

A partir de todo lo dicho, podemos obtener estimaciones de la precisión alcanzable en la zona de pseudoconvergencia utilizando las fórmulas (3.70) y (3.71), junto con estimaciones asintóticas de las soluciones de la recurrencia. Es claro que el cambio de comportamiento de la fracción continua se producirá para N tal que $|r_N| \approx |r_0|$, momento en el cual la fracción continua comienza a converger al cociente de soluciones mínimas, tal y como establece el teorema de Perron.

La precisión alcanzable en la zona de pseudoconvergencia puede ser muy alta, lo cual producirá pérdida de precisión (incluso total) en la evaluación del cociente de soluciones mínimas cuando se utilice precisión finita. Típicamente, la pérdida de precisión en el cálculo de cocientes de soluciones mínimas será mayor cuanto mayor sea la precisión que se obtiene en la zona pseudoconvergente.

3.6. Recurrencias simétricas

El ejemplo más sencillo de recurrencia con comportamiento transitorio, tal y como lo hemos caracterizado, es de la forma:

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \phi(n)y_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.73)$$

donde la función $\phi(n)$ verifica la condición de simetría $\phi(n) = -\phi(-n)$. Es claro que todas las soluciones de la recurrencia (3.73) son simétricas, en el sentido de que

cumplen $y_n = y_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De manera un poco más general consideramos

$$w_{n+1} - aw_{n-1} = \psi(n - n_0)w_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.74)$$

donde $\psi(k) = -\psi(-k)$. Este caso se puede reducir al primero con el cambio $w_{n+n_0} = a^{n/2}y_n$, $\phi(n) = \psi(n - n_0)/\sqrt{a}$. Diremos que esta recurrencia es simétrica respecto a n_0 .

Sin pérdida de generalidad podemos estudiar el caso en el que $f(n) > 0$ cuando $n > 0$ (si $f(n) < 0$ consideramos la recurrencia que satisface la solución $(-1)^n y_n$). De acuerdo con el teorema de Perron (3.2.1), la solución mínima es alternada para n grande, mientras que las soluciones dominantes tienen signo constante.

Según el teorema (3.5.1), si una solución f_n es alternada cuando $n \rightarrow +\infty$ (es decir, $(-1)^n f_n$ tiene signo constante) entonces es alternada para todo $n > 0$. Además $|f_n|$ decrece cuando $|n|$ crece, puesto que $|f_n|$ cumple:

$$|f_{n+1}| - |f_{n-1}| = -\phi(n)|f_n|. \quad (3.75)$$

Por otro lado, la recurrencia hacia delante muestra que cualquier solución g_n con datos iniciales $g_0 > 0$, $g_1 > 0$ es positiva para todo n , y por lo tanto es dominante. De hecho $|g_n|$ crece cuando $|n|$ aumenta, puesto que $|g_n|$ verifica:

$$|g_{n+1}| - |g_{n-1}| = \phi(n)|g_n|. \quad (3.76)$$

Por tanto, si g_n es una solución positiva (o negativa) dominante, la función $|r_n| = |f_n/g_n|$ alcanza el máximo en $n = 0$ y es estrictamente monótona cuando $n > 0$ y cuando $n < 0$. Cuando n no es entero la simetría de las soluciones se pierde, pero el cambio de comportamiento alrededor de n_0 puede conservarse.

3.6.1. Funciones de Bessel modificadas

Como vimos anteriormente, estas funciones satisfacen la recurrencia:

$$y_{\nu+1}(x) - y_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}y_\nu(x). \quad (3.77)$$

Un par de soluciones independientes es el que está formado por las funciones $K_\nu(x)$ y $(-1)^{[\nu]}I_\nu(x)$. Otra notación es $e^{i\pi\nu}I_\nu(x)$, pero en este caso preferimos mantener la notación real. La relación entre ambas funciones viene dada por [1, ec. 9.6.2.]:

$$I_\nu(x) = I_{-\nu}(x) - \frac{2}{\pi} \sin(\nu\pi)K_\nu(x). \quad (3.78)$$

Cuando $\nu \rightarrow +\infty$ la función $K_\nu(x)$ es dominante y la función $(-1)^{[\nu]}I_\nu(x)$ es mínima. Esto se puede deducir a partir de la información asintótica disponible, véase

(1.80) o la referencia [68]. Sin embargo, cuando $\nu \rightarrow -\infty$ la situación es diferente: si reescribimos (3.78) como

$$I_{-\nu}(x) = I_{\nu}(x) + \frac{2}{\pi} \sin(\nu\pi) K_{\nu}(x), \quad (3.79)$$

y utilizamos la propiedad de que $K_{-\nu}(x) = K_{\nu}(x)$, [1, 9.6.6] entonces se observa que los cocientes $K_{\nu}(x)/K_{\nu-1}(x)$ y $-I_{\nu}(x)/I_{\nu-1}(x)$ son similares cuando $\nu \rightarrow -\infty$. La solución mínima cuando $\nu \rightarrow -\infty$ es $(-1)^{[\nu]} I_{-\nu}(x)$.

Debido a estas propiedades, veremos que el fenómeno de pseudoconvergencia está presente cuando ν es negativo. Sin embargo, será poco apreciable si además $|\nu|$ es grande, puesto que en ese caso las funciones $K_{\nu}(x)$ y $(-1)^{[\nu]} I_{\nu}(x)$ se comportan de forma similar.

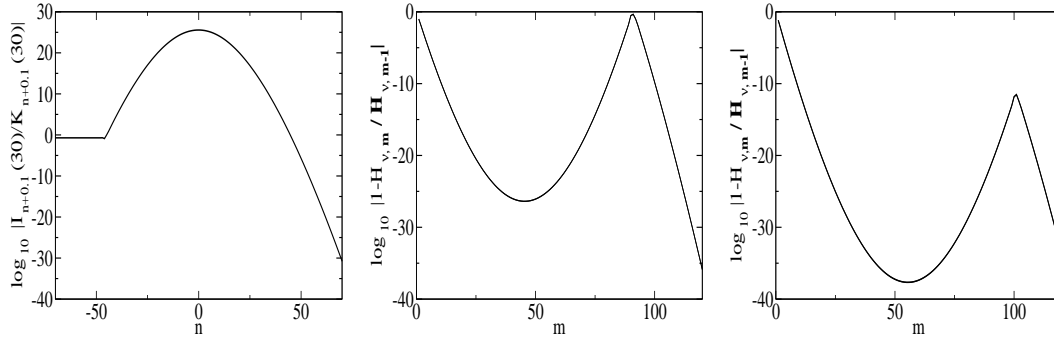


Figura 3.1: Izquierda: Cociente $I_{n+0,1}(30)/K_{n+0,1}(30)$ como función de n . Centro: Diferencia entre aproximantes consecutivos de (3.80) para los valores $\nu = -45,9$, $x = 30$. Derecha: idem para $\nu = -59,9$, $x = 30$. Obsérvese que la precisión alcanzable en la zona pseudoconvergente puede ser muy alta.

La fracción continua asociada a la recurrencia (3.77) es:

$$H_{\nu}(x) = \frac{-x}{2\nu+} \frac{x^2}{2(\nu+1)+} \frac{x^2}{2(\nu+2)+} \cdots \quad (3.80)$$

Esta fracción continua converge al cociente $-I_{\nu}(x)/I_{\nu-1}(x)$, pero inicialmente aproxima el cociente $K_{\nu}(x)/K_{\nu-1}(x)$ cuando ν es negativo. Después del N -ésimo aproximante, donde $N = [\nu]$, la fracción continua abandona este límite transitorio y converge al límite establecido por el teorema de Pincherle. Esto se puede observar en la siguiente figura, que ilustra dos casos diferentes, $\nu = -45,9$ y $\nu = -59,9$. Como se puede ver en la figura 3.1, la precisión alcanzable en la zona pseudoconvergente puede ser muy alta, lo cual puede dar lugar a pérdida de precisión en el cociente final de soluciones mínimas e incluso al cálculo de cocientes erróneos cuando utilizamos precisión finita, como se verá más adelante.

3.7. Funciones hipergeométricas confluentes

3.7.1. Recurrencia $(++)$

Vamos a considerar en primer lugar la recurrencia $(++)$, estudiada por W. Gautschi en [32]:

$$y_{n+1} + b_n y_n + a_n y_{n-1} = 0, \quad (3.81)$$

donde

$$b_n = -\frac{(c+n)(1-c-n+x)}{(a+n)x}, \quad a_n = -\frac{(c+n)(c+n-1)}{(a+n)x}. \quad (3.82)$$

Como hemos visto antes, dos soluciones independientes son:

$$f_n = M(a+n; c+n; x), \quad g_n = (-1)^n \Gamma(c+n) U(a+n; c+n; x). \quad (3.83)$$

Teniendo en cuenta lo que hemos visto anteriormente, f_n es la solución mínima, y por tanto la fracción continua asociada:

$$H_n = \frac{c+n-1}{c+n-1-x+} \frac{(a+n)x}{c+n-x+} \frac{(a+n+1)x}{c+n+1-x+} \dots \quad (3.84)$$

converge al cociente $f_n(x)/f_{n-1}(x)$.

El hecho de que esta fracción continua, especialmente para x grande, converja de manera aparente a un cociente diferente de f_n/f_{n-1} se puede explicar mediante el criterio de signos que hemos estudiado previamente, puesto que cuando x es grande el coeficiente $a_n < 0$ y b_n cambia de signo (suponemos que a y c son positivos).

Podemos relacionar esta recurrencia con la de las funciones de Bessel modificadas: sea $\lambda = x + 1 - c$, si hacemos un desplazamiento del índice n de la forma $\hat{y}_n = y_{n+\lambda}$, entonces \hat{y}_n satisface:

$$\hat{y}_{n+1}(x) + \hat{b}_n(x) \hat{y}_n(x) + \hat{a}_n(x) \hat{y}_{n-1}(x) = 0, \quad (3.85)$$

donde

$$\hat{b}_n(x) = \frac{n}{x} f(n, x), \quad \hat{a}_n(x) = -\frac{n+x}{x} f(n, x), \quad f(n, x) = 1 - \frac{a-c}{a+n+1+x-c}. \quad (3.86)$$

Por lo tanto

$$\hat{b}_n(x) = \frac{n}{x} (1 + \mathcal{O}(x^{-1})), \quad \hat{a}_n(x) = -1 + \mathcal{O}(x^{-1}), \quad (3.87)$$

lo cual, en primera aproximación, es la recurrencia de las funciones de Bessel modificadas. Para x grande es de esperar que haya comportamiento transitorio de la función \hat{y}_n antes del punto $n = 0$ (o equivalentemente, de las funciones f_n o g_n en

torno al punto $n = n_0$).

También es posible entender este caso mediante resultados de la teoría de fracciones continuas. Más específicamente, recordamos brevemente el concepto de correspondencia de fracciones continuas (véase [48] o [56] para más detalles).

Consideramos el cuerpo algebraico formado por las series de potencias formales:

$$L(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.88)$$

El elemento neutro $\mathbf{0}$ es obviamente la serie tal que $c_k = 0 \ \forall k$, y no se exige convergencia de esta serie en ningún punto. Se define el grado del primer término no negativo, $\lambda(L)$, como:

$$\lambda(L) = \begin{cases} m & \text{si } L(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k x^k, \quad c_m \neq 0 \\ \infty & \text{si } L(x) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.89)$$

Dada una función $f(x)$ meromorfa en $x = 0$ utilizamos la notación $\mathcal{L}(f(x))$ para designar la correspondiente serie de Laurent en un entorno del origen. Se dice que una fracción continua K_n *corresponde* a $L(x)$ en $x = 0$ si el número ν_n , llamado *orden de correspondencia*, satisface:

$$\nu_n := \lambda(L(x) - \mathcal{L}(f(x))) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.90)$$

De manera análoga se puede definir la correspondencia en un punto $x = a$ o en $x = \infty$.

Esencialmente la condición de correspondencia establece la coincidencia hasta un cierto orden de los desarrollos (formales) en serie de Laurent en torno al punto $x = 0$ tanto del cociente de soluciones como de los aproximantes sucesivos de la fracción continua. La correspondencia no implica la convergencia de la fracción continua al cociente que nos interesa, pero existe una relación sencilla entre ambas situaciones [56, Teorema 5.14].

En el caso de la fracción continua (3.84) se trata de una T-fracción, que se caracteriza por corresponder a dos series formales diferentes, una en $x = 0$ y otra en $x = \infty$. Más concretamente podemos enunciar el siguiente resultado [48, Teorema 7.24]:

Teorema 3.7.1 *Supongamos que $c + n \neq 1, 0, -1, -2, \dots$, la fracción continua (3.84) corresponde en $x = 0$ al cociente:*

$$\frac{{}_1F_1(a + n; c + n; x)}{{}_1F_1(a + n - 1; c + n - 1; x)}$$

y converge a dicha función para $x \in \mathbb{R}$. En $x = \infty$ la fracción continua (3.84) corresponde al cociente:

$$-\frac{c+n-1}{x} \frac{{}_2F_0(a+n; a+1-c; -1/x)}{{}_2F_0(a+n-1; a+1-c; -1/x)}.$$

Si además tenemos en cuenta [1, 13.5.2] que cuando $x \rightarrow \infty$:

$$U(a+n; c+n; x) = x^{-a-n} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{(a+n)_k (1+a-c)_k}{k!} (-x)^{-k} + O(x^{-K}) \right) \quad (3.91)$$

es claro por qué cuando x es grande la fracción continua proporciona estimaciones para cocientes de la solución dominante $g_n = (-1)^n \Gamma(c+n) U(a+n, c, x)$. Sin embargo, como la fracción continua necesariamente converge al cociente de soluciones mínimas $f_n(x)/f_{n-1}$ esto sólo puede ser cierto como fenómeno transitorio.

3.7.2. Estimación asintótica del error

Vamos a utilizar estimaciones asintóticas de las funciones $M(a; c; x)$ y $U(a; c; x)$ para estudiar las propiedades de la fracción continua (3.84). En la referencia [83] se dan desarrollos asintóticos cuando $x \rightarrow \infty$, uniformemente válidos con respecto a $\mu = a/x$ y con la condición de que $c - a = \mathcal{O}(1)$. Los términos dominantes proporcionan la siguiente estimación para $r_N = f_N/g_N$:

$$r_N \sim (-1)^N e^x x^{2a+N-c} \frac{x^N}{\Gamma(a+N)} \left(1 + \frac{a+N-1}{x} \right)^{a-c} \left(1 + \frac{a+N}{x} \right)^{a-c+1} \quad (3.92)$$

Considerando solamente el factor $x^N/\Gamma(a+N)$ es sencillo ver que r_N crece inicialmente cuando aumentamos N , especialmente cuando x es grande, aunque naturalmente $r_N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. Este comportamiento indica la presencia de pseudo-convergencia de la fracción continua (3.84) al cociente de $U(a+n; c+n; x)$, aunque la convergencia final sea al cociente de funciones de primera especie $M(a+n; c+n; x)$.

En la siguiente figura se ilustra el caso $n = 1$, que corresponde al cociente:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{M(a+1; c+1; x)}{M(a; c; x)}, \quad (3.93)$$

La fracción continua (3.84) converge inicialmente al cociente:

$$\frac{g_1}{g_0} = -c \frac{U(a+1; c+1; x)}{U(a; c; x)}, \quad (3.94)$$

La gráfica muestra asimismo las estimaciones del error relativo obtenidas a partir de las ecuaciones (3.70), (3.71) y (3.92).

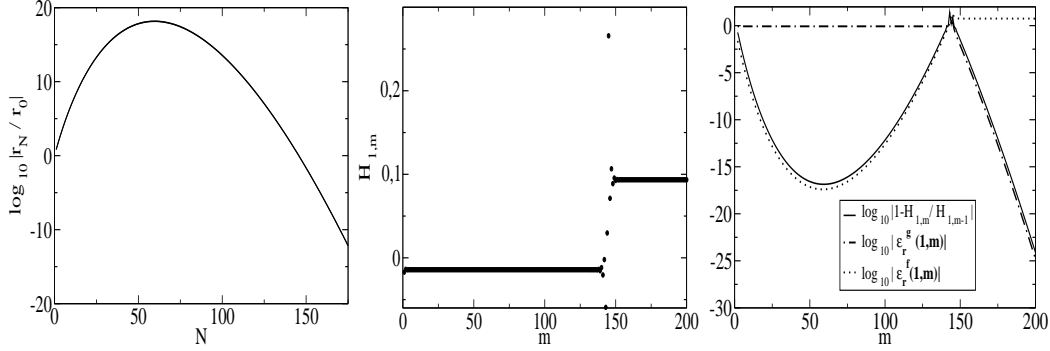


Figura 3.2: Izquierda: Gráfica de la función $|r_N/r_0|$ cuando $a = 12,4$, $b = 1,3$, $x = 60$. Centro: aproximantes de la fracción continua (3.84), $a = 12,4$, $b = 1,3$, $x = 60$. Se observa un brusco cambio de comportamiento cuando $|r_N/r_0| \simeq 1$. Derecha: diferencia entre aproximantes consecutivos de (3.84), junto con las estimaciones dadas por (3.70) y (3.71)

El error relativo respecto al límite temporal, $|\epsilon_r^g(1, m)|$, decrece hasta que se alcanza el máximo r_N , donde $N = 1 + m$. Para x grande es sencillo obtener la siguiente estimación para el valor de N tal que $|r_N|$ es máximo:

$$N^* = x - c + \mathcal{O}(1/x). \quad (3.95)$$

El menor error relativo para la zona pseudoconvergente se alcanzará por tanto en el aproximante de orden $[x - c]$, donde $[x - c]$ representa la parte entera de $x - c$. Podemos estimar el error cuando x es grande y $N = x - c$ utilizando (3.71):

$$|\epsilon_r^g(1, m)| = \left| \frac{r_1 - r_0}{r_{N^*} - r_0} \right| \approx \left| \frac{r_1}{r_{N^*}} \right| \equiv \epsilon_p,$$

La aproximación es válida puesto que $|r_{N^*}| \gg |r_0|$, $r_1/r_0 \sim -x/a$ y consideramos el caso en el que x es grande. Por medio de (3.92) obtenemos que cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\epsilon_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} 4^{c-a} \frac{1}{\Gamma(a+1)} x^{a+1/2} e^{-x} (1 + \mathcal{O}(x^{-1})). \quad (3.96)$$

Después de $[x - c]$ iteraciones la pseudoconvergencia empeora, $|r_N/r_0|$ empieza a decrecer y los aproximantes de la fracción continua comienzan a converger al cociente de soluciones mínimas. Una estimación de cuándo se produce este cambio de comportamiento viene dada por:

$$|\epsilon_r^f(1, m)| = \left| \frac{1/r_1 - 1/r_0}{1/r_N - 1/r_0} \right| \approx \left| \frac{1}{r_0/r_N - 1} \right| \equiv \epsilon.$$

Cuando $|r_N| < |r_0|$ comienza la convergencia al cociente f_1/f_0 . Tomando $|r_N/r_0| = 1$ en la estimación $r_N/r_0 \approx x^N \Gamma(a)/\Gamma(a+n)$ resulta que, para x grande,

$$N \sim ex + (a - 1/2) \log(x) + \mathcal{O}(1).$$

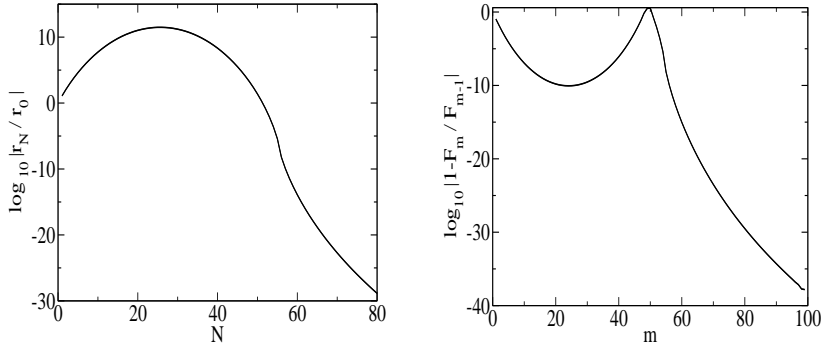


Figura 3.3: Izquierda: función r_N/r_0 correspondiente a los datos $a = 4,4$, $c = 60,3$, $x = 0,3$. Derecha: diferencia relativa entre aproximantes consecutivos de (3.97).

Esto coincide con el comportamiento numérico observado.

3.7.3. Recurrencia (+0)

A partir de los coeficientes de esta recurrencia (3.44) la fracción continua asociada es:

$$H_n = \frac{a+n-c}{2a+2n+x-c+} \frac{(c-a-n-1)(a+n)}{2a+2n+2+x-c+} \frac{(c-a-n-2)(a+n+1)}{2a+2n+4+x-c+} \quad (3.97)$$

El coeficiente a_n es negativo cuando $c > a+n$, y b_n cambia de signo en el punto $n_0 = [(c-x-2a)/2]$, por lo que es de esperar que haya comportamientos transitorios en torno a este punto. Al igual que ocurría en el ejemplo anterior, podemos relacionar este caso con el de las funciones de Bessel modificadas. Si consideramos las funciones desplazadas $\hat{y}_n = y_{n+n_0}$, satisfacen una nueva recurrencia con coeficientes:

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= -\frac{4n}{c-x+2n} = -\frac{4n}{c}(1 + \mathcal{O}(c^{-1})), \\ \hat{a}_n &= -\frac{c+x-2n}{c-x+2n} = -1 + \mathcal{O}(c^{-1}), \end{aligned} \quad (3.98)$$

que en el caso de que c sea grande es esencialmente la recurrencia de las funciones de Bessel modificadas.

Es importante señalar que en este ejemplo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 > 0$, lo que significa que la condición de que el coeficiente a_n sea negativo no se verifica cuando n es suficientemente grande. Sin embargo, lo que es verdaderamente importante a efectos de pseudoconvergencia es que la condición $a_n < 0$ se cumpla en un entorno suficientemente grande de valores de n en torno a n_0 , que es el punto de cambio de signo del coeficiente b_n .

3.8. Funciones hipergeométricas de Gauss

En el caso de las funciones hipergeométricas de Gauss $y_n = {}_2F_1(a + kn, b + ln; c + mn; x)$, donde $k, l, m = 0, \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, también se observan fenómenos de pseudoconvergencia y soluciones transitoriamente mínimas. En la referencia [35] el número total de recurrencias se reduce a cuatro casos básicos, cuyos representantes son: $(++0)$, $(00+)$, $(++-)$ and $(+0-)$. Nos centraremos especialmente en el caso $(00+)$ y relacionados, como $(+++)$, donde la pseudoconvergencia está presente.

De los cuatro casos mencionados, solamente uno de ellos presenta un valor de $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ positivo para todo valor real de x , la recurrencia $(++0)$. A pesar de la observación hecha en el caso confluyente $(+0)$ vamos a concentrarnos en aquellos casos en los que $a_n < 0$, y por tanto no consideraremos esta recurrencia. Las recurrencias que hemos comentado anteriormente, y que se tratan en [36], son la $(00+)$, la $(++-)$ y la $(+0-)$.

Estas recurrencias tienen la forma:

$$y_{n+1} + \left(f(x) - \frac{g(x)}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right) y_n + (a + \mathcal{O}(n^{-1})) y_{n-1} = 0, \quad (3.99)$$

donde $f(x_0) = 0$ y $a < 0$. La función $g(x)$ depende de todos los parámetros salvo n . El coeficiente b_n cambia de signo en el punto $n_0 \simeq g(x)/f(x)$, que será grande si x está cerca de x_0 . Por lo tanto, si x está suficientemente cerca de x_0 las soluciones desplazadas $\hat{y}_n = y_{n+n_0}$ verifican:

$$\hat{y}_{n+1} + n \frac{f(x)}{n_0} (1 + \mathcal{O}(n_0^{-1})) y_n + a(1 + \mathcal{O}(n_0^{-1})) y_{n-1} = 0, \quad (3.100)$$

cuando $|n| \ll |n_0|$. Una vez más esto es similar a la recurrencia de las funciones de Bessel modificadas.

3.8.1. Recurrencia $(+++)$

Por simplicidad consideramos la recurrencia $(0,0,+)$, equivalente a $(+++)$ utilizando las relaciones expuestas en el capítulo 1. Tomamos la función:

$$y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(c+n)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix}; x \right),$$

la recurrencia correspondiente tiene como coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{x(x-1)(a+n)(b+n)}, \quad b_n = \frac{((a+b+2n-1)x - c - n + 1)}{x(x-1)(a+n)(b+n)}. \quad (3.101)$$

Estos coeficientes están relacionados con los de la recurrencia $(+++)$ que hemos visto anteriormente, salvo los factores debidos a la normalización que hemos tomado

de las soluciones. Consecuentemente, la fracción continua asociada, que se suele conocer como fracción continua de Nörlund [47], [56, pág. 304], es:

$$H_n = \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_2}{b_2+} \dots, \quad (3.102)$$

donde

$$a_1 = -1, \quad a_m = x(1-x)(a+n+m-2)(b+n+m-2), \quad m = 2, 3, \dots \quad (3.103)$$

$$b_m = (a+b+2n+2m-1)x - c - n - m + 1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.104)$$

Elegimos la segunda solución en $x \in (0, 1)$ del conjunto de (1.7)–(1.12), añadiendo un factor extra $1/\Gamma(c+n)$:

$$y_{3,n}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(a+b+1-c+n)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ a+b+n+1-c \end{matrix}; 1-x \right). \quad (3.105)$$

Anteriormente hemos visto que $y_{n,1}(x)$ es mínima cuando $x < 1/2$ y que $y_{n,3}(x)$ es mínima cuando $x > 1/2$. En el punto $x = 1/2$, donde el teorema de Perron no es concluyente acerca de la existencia de soluciones mínimas, es sencillo estudiar explícitamente el carácter de las soluciones. Dado:

$$y_n(d, x) \equiv \frac{1}{\Gamma(d+n)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ d+n \end{matrix}; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+n)_k (b+n)_k}{k! \Gamma(d+n+k)} x^k \quad (3.106)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\epsilon)} = 0 \text{ if } \epsilon > 0, \quad (3.107)$$

se obtiene que si $d_1 > d_2$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n(d_1, x)}{y_n(d_2, x)} = 0 \quad (3.108)$$

para $x \in (0, 1)$. En nuestro caso $|y_1(1/2)| = y_n(c, 1/2)$ y $|y_3(1/2)| = y_n(a+b+1-c, 1/2)$, de manera que si $x = 1/2$ definimos:

$$\lambda = a+b+1-2c \quad (3.109)$$

y tenemos:

1. Si $\lambda > 0$ entonces $y_{1,n}(1/2)$ es dominante y $y_{3,n}(1/2)$ es mínima.
2. Si $\lambda < 0$ entonces $y_{3,n}(1/2)$ es dominante y $y_{1,n}(1/2)$ es mínima.
3. Si $\lambda = 0$ entonces no hay soluciones mínimas porque $a_n = 0$.

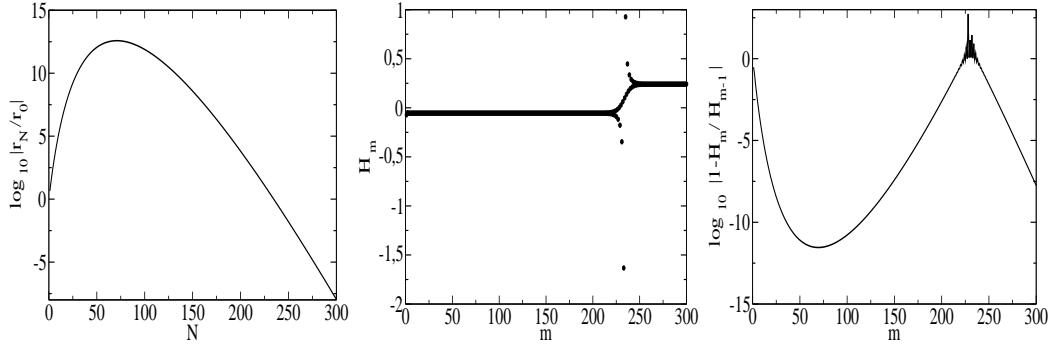


Figura 3.4: Izquierda: Gráfica de $|r_N/r_0|$ correspondiente a $a = 20$, $b = 15,5$, $c = 0,6$, $x = 0,4$. Centro: aproximantes de la fracción continua (3.102). Derecha: diferencia relativa entre aproximantes sucesivos de (3.102)

En cualquier caso el par $\{y_{1,n}(x), y_{3,n}(x)\}$ es numéricamente satisfactorio en el intervalo $(0, 1)$.

Se cumple además que $a_n < 0$ si $x \in (0, 1)$, cuando $a + n > 0$ y $b + n > 0$, y b_n cambia de signo en:

$$n_0 = \frac{c - 1 - (a + b - 1)x}{2x - 1} = -\frac{1}{2} \left((a + b - 1) + \frac{\lambda}{2x - 1} \right). \quad (3.110)$$

Cuando λ es positivo el valor n_0 es tanto mayor cuanto más cerca está x de $1/2$ por la izquierda. Por el contrario, si $\lambda < 0$ y $x \rightarrow 1/2^+$ entonces $n_0 \rightarrow +\infty$. Esto explica la presencia de una solución transitoriamente mínima cuando $\lambda > 0$ y $x < 1/2$, pero próximo a $1/2$: la función $y_{3,n}(x)$ es transitoriamente mínima puesto que es recesiva en la dirección de n creciente respecto a $y_{1,n}(x)$ siempre que $n < n_0$. Cuanto más cerca está x de $1/2$ mayor es el valor de n_0 , de manera que cuando $x = 1/2$ entonces $n_0 = \infty$ y $y_{3,n}(1/2)$ pasa a ser mínima para todos los valores positivos de n . Este fenómeno puede verse en la figura 3.4.

3.8.2. El límite confluyente de la recurrencia $(+ + +)$

Como hemos visto, la pseudoconvergencia en el caso de la recurrencia $(+ + +)$ de las funciones de Gauss es una consecuencia del cambio de comportamiento de las soluciones $y_{1,n}$ y $y_{3,n}$ al pasar el punto $x = 1/2$.

Vamos a considerar el límite confluyente explicado anteriormente:

$$M(a, c, x) \equiv {}_1F_1 \left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} ; x \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{b} \right) \quad (3.111)$$

Esto nos permite relacionar la solución mínima $f_n(x)$ de la recurrencia confluyente $(+ +)$, véase fórmula (3.83), con la solución mínima $y_{1,n}(x)$ de la recurrencia de

Gauss (+ + +), salvo por el factor $1/\Gamma(c+n)$.

$$f_n(x) = \Gamma(c+n) \lim_{b \rightarrow +\infty} y_{1,n}(x/b). \quad (3.112)$$

Análogamente, tomamos la segunda solución $y_{3,n}(x)$, añadiendo un factor de normalización $\Gamma(1+b-c)$ que antes omitíamos puesto que no depende de n pero ahora nos hace falta para tomar el límite confluyente:

$$y_{3,n}(x) = \frac{(-1)^n x^{-(a+n)} \Gamma(1+b-c)}{\Gamma(a+b+1-c+n)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, a+1-c \\ a+b+n+1-c \end{matrix}; 1 - \frac{1}{x} \right), \quad (3.113)$$

Considerando la identidad formal:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; cx \right) = {}_2F_0(a, b; ; x), \quad (3.114)$$

que es cierta término a término aunque conduce a una serie divergente en todo punto, tenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(c+n) \lim_{b \rightarrow \infty} y_{3,n}(x/b) &= (-1)^n \Gamma(c+n) x^{-a-n} {}_2F_0(a+n, a+1-c; ; -\frac{1}{x}) \\ &\sim (-1)^n \Gamma(c+n) U(a+n, c+n, x) = g_n(x), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.115)$$

donde g_n es una segunda solución (dominante) de la recurrencia confluyente (+ +).

Este hecho explica el comportamiento de las soluciones de la recurrencia (+ +) en términos de la recurrencia de Gauss (+ + +). Cuando tomamos el límite confluyente $b \rightarrow +\infty$ in (3.112) y en (3.115), el comportamiento transitorio de las funciones de Gauss cerca del punto $x = 1/2$ se convierte en comportamiento transitorio cuando x es grande. La solución mínima (transitoria) es el límite confluyente de la solución mínima (transitoria) en el caso Gauss. A partir de (3.110) se ve que este cambio de comportamiento tiene lugar en:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} n_0(x/b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{c-1-(a+b-1)x/b}{2x/b-1} = x+1-c.$$

Todo ello concuerda con lo que se observaba en la recurrencia (+ +).

3.9. Análisis del error en precisión finita

Los problemas de convergencia y pseudoconvergencia de las fracciones continuas están ligados de manera natural al problema de condicionamiento y de estabilidad numérica de las recurrencias a tres términos. Este tema aparece tratado en profundidad en [89].

La recurrencia progresiva (en dirección creciente de n) está bien condicionada para soluciones dominantes. Como hemos señalado anteriormente, cualquier solución con valores iniciales *numéricos* y_0, y_1 verifica que:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{y_N/y_{N-1}}{g_N/g_{N-1}} = 1, \quad (3.116)$$

donde g_N es una solución dominante. En otras palabras, todas las soluciones se comportan (numéricamente) como soluciones dominantes si N es suficientemente grande, de ahí que no se deba utilizar la recurrencia progresiva para calcular soluciones mínimas.

Sin embargo, como consecuencia de lo expuesto en este capítulo es claro que la información asintótica acerca del comportamiento de las soluciones no es suficiente para asegurar que el cálculo de una solución mediante la recurrencia a tres términos en una dirección dada se realiza correctamente. Si el comportamiento de las soluciones se invierte de forma transitoria es posible que se produzca una pérdida de precisión en la evaluación de soluciones dominantes (mínimas) al aumentar (disminuir) n .

En primer lugar veremos la posible pérdida de precisión en el cálculo de cocientes de soluciones de órdenes consecutivos, es decir, y_k/y_{k-1} .

3.9.1. Errores en la evaluación numérica de las fracciones continuas

Primeramente consideramos la evaluación backward de f_n/f_{n-1} , donde la función f_n es mínima. Hemos visto que la recurrencia en sentido de n decreciente, con valores iniciales $f_n, n = N, N+1, N > n_0$ es equivalente al cálculo del m -ésimo aproximante de la fracción continua ($m = N - n$). La recurrencia en sentido descendente está bien condicionada cuando $n > n_0$, y por tanto podemos suponer que la solución numérica $y_n, n = n_0, n_0 + 1$ se calcula correctamente. Cuando se utiliza precisión finita escribimos esta solución como sigue:

$$y_n = \epsilon_1 r_{n_0} g_n + (1 + \epsilon_2) f_n, \quad n = n_0, n_0 + 1, \quad (3.117)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son de orden ϵ máquina y g_n es dominante pero transitoriamente mínima cuando $n \leq n_0$. Como $R_n = |r_n| = |f_n/g_n|$ decrece cuando $n < n_0$ crece, al calcular con la recurrencia en sentido descendente cuando $n < n_0$ aumenta la componente no deseada g_n . El error relativo de y_n/y_{n-1} respecto al cociente de soluciones mínimas se puede acotar de la manera siguiente:

$$|\epsilon_n| \equiv \left| 1 - \frac{y_n}{y_{n-1}} \frac{f_{n-1}}{f_n} \right| > F_n \frac{|1 - r_{n-1}/r_n|}{|1 + \epsilon_2| + F_n} = F_n \frac{C_n}{1 + F_n}, \quad (3.118)$$

donde

$$F_n := |\epsilon_1| \frac{R_{n_0}}{R_{n-1}} \quad (3.119)$$

y $C_n = |1 - r_{n-1}/r_n| = 1 + R_{n-1}/R_n \approx 1$ cuando f_n y g_n tienen patrones de signos opuestos.

La precisión alcanzable viene determinada esencialmente por el factor F_n , que es igual al cociente R_{n_0}/R_{n-1} multiplicado por el ϵ máquina. Cuanto menor sea el valor de n mayor será la pérdida de precisión, puesto que R_n decrece cuando n disminuye. Por otro lado, a partir de (3.71) se puede ver que la mayor precisión alcanzable en la zona pseudoconvergente se puede aproximar mediante el cociente R_{n-1}/R_{n_0} , de modo que la pérdida de precisión en el cálculo de cocientes de soluciones mínimas es inversamente proporcional (aproximadamente) a la precisión en la zona pseudoconvergente. De esta manera, cuando la fracción continua pseudoconverge hasta la precisión de la máquina es de esperar una pérdida total de cifras significativas en el cálculo de los cocientes de soluciones mínimas, una vez superada la zona de pseudoconvergencia.

3.9.2. Errores en el cálculo numérico de y_n

Consideremos la evaluación de una solución pseudomínima mediante la recurrencia en sentido forward, comenzando en un valor $n < n_0$, con valores iniciales numéricos $y_n \simeq g_n$, $n = m, m-1$, $m < n_0$. Escribimos esta solución como:

$$y_n = \epsilon_1 f_n + (1 + \epsilon_2) r_m g_n, \quad (3.120)$$

donde ϵ_1, ϵ_2 son del orden del ϵ de la máquina. El factor $\epsilon_1 f_n$ es una perturbación de orden épsilon máquina respecto al segundo factor, y contiene una solución mínima f_n que domina temporalmente. En efecto, si $R_n = |f_n/g_n|$ crece inicialmente entonces se producirá pérdida de precisión en la evaluación forward de la función y_n . En precisión finita se perderá toda la precisión cuando:

$$\frac{R_m}{R_n} < |\epsilon_1| \simeq \epsilon, \quad (3.121)$$

donde ϵ es el ϵ máquina. Esto es así puesto que el segundo término de (3.120), que es el término correspondiente a la solución que queremos calcular, pasa a ser despreciable (a efectos de cálculo en máquina) respecto al primero. En la figura siguiente se muestra la evaluación de una solución dominante (transitoriamente mínima) y de la solución mínima en la recurrencia $(++)$ de las funciones hipergeométricas confluentes. El cálculo se ha realizado en doble precisión en Fortran y comparando con el cálculo directo que proporciona Maple.

Como se ve en la figura 3.5, cuando no se pierde toda la precisión en el punto $n = n_0$ se recuperan cifras significativas cuando n es suficientemente grande (izquierda, en línea continua). Más aún, incluso cuando los resultados para la solución dominante son completamente erróneos en torno a n_0 es posible recuperar algo de precisión, aunque sea parcialmente (izquierda, en línea de puntos). Análogamente, el cálculo de la solución mínima mediante iteración hacia delante es correcto temporalmente (derecha).

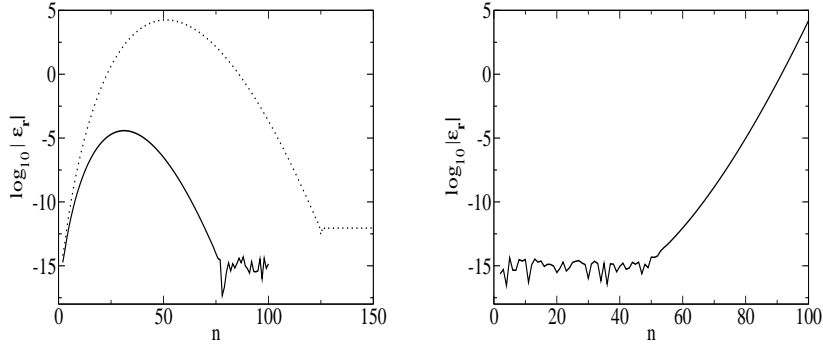


Figura 3.5: Izquierda: error relativo en el cálculo de $g_n = (-1)^n \Gamma(c+n)U(a+n, c+n, x)$, solución transitoriamente mínima, cuando $a = 0,3$, $b = 0,8$, $x = 31$ (línea continua) y cuando $x = 51$ (línea punteada). El error relativo es $\epsilon_r = |1 - g_n^F/g_n^M|$, donde g_n^F son valores calculados en Fortran (precisión doble, $\epsilon \approx 2,2 \cdot 10^{-16}$) y g_n^M son valores calculados en Maple con 30 dígitos. Derecha: lo mismo para la solución mínima $f_n = M(a+n, c+n, x)$, cuando $a = 0,3$, $b = 0,8$, $x = 31$.

Este fenómeno de pérdida y recuperación de precisión se puede entender escribiendo la solución numérica y_{n_0} , y_{n_0+1} como combinación del par independiente $\{f_n, g_n\}$:

$$\begin{pmatrix} y_{n_0} \\ y_{n_0+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{C_{n_0}[f, g]} \left[C_{n_0}[y, g] \begin{pmatrix} f_{n_0} \\ f_{n_0+1} \end{pmatrix} + C_{n_0}[f, y] \begin{pmatrix} g_{n_0} \\ g_{n_0+1} \end{pmatrix} \right], \quad (3.122)$$

donde los determinantes de Casorati están definidos como:

$$C_{n_0}[v, w] \equiv \begin{vmatrix} v_{n_0} & w_{n_0} \\ v_{n_0+1} & w_{n_0+1} \end{vmatrix}. \quad (3.123)$$

Esta expresión se puede deducir siguiendo un razonamiento similar al que conducía a la fórmula (3.68). Si el cociente $|r_n| = |f_n/g_n|$ crece inicialmente debido a que f_n es transitoriamente mínima cuando $n < n_0$, entonces resulta que (y_{n_0}, y_{n_0+1}) es casi linealmente dependiente de (f_{n_0}, f_{n_0+1}) , y se produce una pérdida de cifras significativas en el término $C_{n_0}[f, y]$, que se mantiene cuando $n > n_0$. Por otro lado, no hay pérdida de precisión en $C_{n_0}[y, g]$, puesto que, como se ha comentado anteriormente, f_n y g_n tienen patrones de signos opuestos (e igualmente y_n and g_n cuando $n = n_0, n_0 + 1$).

La pérdida de precisión se puede estimar a partir del cociente de las primeras componentes de (3.122). La precisión relativa en el segundo término, que es el dominante cuando $n \gg n_0$, se reduce en $n = n_0$ por un factor:

$$L = \left| \frac{\epsilon_1 f_{n_0}}{(1 + \epsilon_2) r_m g_{n_0}} \right| \simeq |\epsilon_1| \frac{R_{n_0}}{R_m} \quad (3.124)$$

Consecuentemente, la mayor precisión alcanzable cuando $n \gg n_0$ se puede estimar por medio de:

$$\max \{ \epsilon, \epsilon L \} \approx \epsilon \max \{ 1, \epsilon R_{n_0} / R_m \}, \quad (3.125)$$

suponiendo que los errores en $n = n_0$ constituyen la única fuente de problemas numéricos. Por lo tanto, mientras se cumpla que:

$$R_m / R_{n_0} > \epsilon^2 \quad (3.126)$$

es posible recuperar cifras significativas cuando $n > n_0$.

Esta situación de pérdida y recuperación de la precisión que se observa en la figura 3.5 se da en otras circunstancias, por ejemplo cuando se utiliza una recurrencia (sin soluciones pseudomínimas) para calcular una solución mínima haciendo primero iteración hacia delante (lo que provoca pérdida de dígitos significativos) y luego hacia atrás.

Es claro que el control de este tipo de comportamientos es crucial para una utilización numérica correcta de las relaciones de recurrencia y de las fracciones continuas asociadas. Posteriormente este problema aparecerá relacionado con ciertas fracciones continuas que son necesarias para calcular los cocientes de funciones hipergeométricas, los cuales se usan a su vez para el cálculo de ceros de dichas funciones.

3.10. Conclusiones y problemas relacionados

En este capítulo se han analizado propiedades numéricas de las relaciones de recurrencia a tres términos que satisfacen las funciones hipergeométricas clásicas. Desde un punto de vista analítico y computacional es importante detectar la existencia de soluciones mínimas de dichas recurrencias, así como identificarlas en su caso. Por otra parte, esta información no es suficiente para garantizar una utilización satisfactoria de estas relaciones, puesto que se pueden presentar soluciones pseudomínimas, es decir, soluciones que son dominantes pero que se comportan temporalmente como soluciones mínimas. Ello afecta de manera decisiva al comportamiento numérico de las relaciones de recurrencia y de las fracciones continuas asociadas.

Una primera cuestión que queda abierta es el análisis asintótico de algunas de las recurrencias de las funciones hipergeométricas confluentes. En los casos $(++)$ y $(0+)$, así como en sus análogos en la dirección de n decreciente y en la recurrencia $(+0)$ la identificación de las soluciones mínimas es clara, [83, 84]. Sin embargo, los casos (-0) , $(+-)$ y $(-+)$ no parecen estar cubiertos en la literatura sobre asintótica de funciones hiperegeométricas confluentes, y las soluciones mínimas de estas recurrencias solamente se pueden identificar de forma numérica.

Por otro lado, el material de este capítulo referente a las soluciones pseudomínimas está recogido en [13], y supone una generalización a otras familias de funciones hipergeométricas de los resultados expuestos en [31], donde solamente se trata la fracción continua asociada a la recurrencia $(++)$ de las funciones hipergeométricas confluentes. Cabe preguntarse si este fenómeno puede darse cuando los signos de los coeficientes son diferentes de los que hemos estudiado aquí, o en otro tipo de recurrencias.

Capítulo 4

Cálculo de ceros reales de funciones hipergeométricas

4.1. Preliminares y antecedentes

El problema de cálculo de ceros de funciones hipergométricas clásicas reviste gran importancia en diversos problemas tanto en Matemáticas como en otras disciplinas. A modo de ejemplo, los ceros de los polinomios ortogonales clásicos (Jacobi, Laguerre y Hermite) son los nodos de las correspondientes cuadraturas gaussianas, que se utilizan en problemas de integración numérica y ecuaciones diferenciales.

Existen varios métodos propuestos en la literatura para el cálculo de ceros de funciones hipergeométricas, especialmente para las funciones de Bessel y los polinomios ortogonales clásicos. Véase [75] y las referencias allí citadas. Algunos métodos propuestos son:

- Métodos matriciales. En el caso de los polinomios ortogonales clásicos, las conocidas relaciones de recurrencia a tres términos y las propiedades de ortogonalidad se prestan a una formulación matricial del problema de cálculo de ceros, que resulta en un algoritmo debido a Golub y Welsch [42]. De manera esquemática, el problema de cálculo de ceros de los polinomios ortogonales se traduce en el problema del cálculo de los autovalores de una matriz tridiagonal (que se puede hacer simétrica con normalizaciones adecuadas), cuyas entradas vienen dadas en términos de los coeficientes de la recurrencia a tres términos. Esta formulación también se puede adaptar al cálculo de funciones que son soluciones mínimas de recurrencias a tres términos, como las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ o Coulomb $F_n(\gamma, x)$, véanse [6, 43, 62].
- En [69] se propone utilizar el concepto de grado topológico para determinar el número de ceros de una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ y derivable dos veces con continuidad. A partir de esta información se aíslan los ceros de la función en subintervalos y se procede a construir algoritmos de tipo bisección

para aproximar cada uno de los ceros.

- En [8] se propone la construcción de un desarrollo tipo Chebyshev para aproximar la función $f(x)$ por un polinomio y aplicar después un algoritmo estándar de localización de ceros. Dados $N + 1$ puntos en el intervalo de estudio $[a, b]$ se construye la aproximación en términos de los polinomios de Chebyshev, que después se convierte en un polinomio de grado N sobre el intervalo $[-1, 1]$. Por último se puede aplicar un algoritmo estándar para localizar las raíces del polinomio en cuestión.
- En la referencia [78] los autores proponen un método numérico para calcular ceros de funciones que son solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, con ejemplos de funciones de Bessel y Coulomb.
- Algunos autores emplean técnicas de análisis asintótico para estimar los ceros, véase por ejemplo [81]. Cuando se pueden obtener aproximaciones asintóticas a los ceros, lo cual no siempre es sencillo, este enfoque puede utilizarse en combinación con los métodos de localización de raíces.

En este capítulo analizaremos los métodos del punto fijo expuestos en [40, 41, 75, 76]. Estos métodos presentan buenas propiedades de convergencia global a los ceros, y además son aplicables a diferentes familias de funciones hipergométricas, ya que parten de las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales, que hemos comentado con anterioridad y que son comunes a todas ellas.

Primeramente daremos la construcción teórica de los métodos de manera esquemática, y después describiremos cómo estos métodos se utilizan para construir el paquete de rutinas de cálculo **zerosSF** en el programa simbólico-numérico Maple. En esta segunda parte incuiremos aspectos computacionales del método y comprobaciones que se han realizado en Maple para elaborar los programas. Este conjunto de rutinas se expone en la referencia [15], y en el apéndice puede encontrarse una breve descripción de su funcionamiento.

4.2. Métodos de punto fijo

Supongamos que tenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma normal en un intervalo I :

$$y''(x) + \tilde{A}_y(x)y(x) = 0, \quad w''(x) + \tilde{A}_w(x)w(x) = 0. \quad (4.1)$$

Sean $\{y^{(1)}(x), y^{(2)}(x)\}$ y $\{w^{(1)}(x), w^{(2)}(x)\}$ dos conjuntos de soluciones independientes de dichas ecuaciones. Entonces, como se muestra en [60, 61], tanto el par $\{y^{(1)}(x), w^{(1)}(x)\}$ como $\{y^{(2)}(x), w^{(2)}(x)\}$ satisfacen un único sistema de ecuaciones

difero-diferenciales de la forma (1.85):

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)y(x) + d(x)w(x) \\ w'(x) &= b(x)w(x) + e(x)y(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x) & d(x) \\ e(x) & b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ w(x) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Una propiedad importante de los coeficientes de este sistema es que $d(x)e(x) < 0$ para todo $x \in I$ cuando las soluciones oscilan, como hemos visto en el capítulo 1. Sin pérdida de generalidad supondremos de ahora en adelante que $d(x) > 0$ en I .

Anteriormente hemos visto que mediante el cambio de variable (1.87)

$$z(x) = \int^x \sqrt{-d(t)e(t)} dt \quad (4.4)$$

y normalizaciones adecuadas se puede transformar el sistema anterior en otro en la nueva variable z :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}}(z) \\ \dot{\tilde{w}}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta(z) & 1 \\ 1 & \eta(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}(z) \\ \tilde{w}(z) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde los puntos indican derivación respecto a la variable z y además:

$$\begin{aligned} \eta(z) &:= \frac{b(z) - a(z)}{2} \dot{z}(z) + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \log \left| \frac{d(z)}{e(z)} \right|, \\ \tilde{y}(z(x)) &= \sqrt{\frac{z'}{|d|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int^x (a+b) \right) y(x), \\ \tilde{w}(z(x)) &= \sqrt{\frac{z'}{|e|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int^x (a+b) \right) w(x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es claro que los ceros de las funciones $\tilde{y}(z)$ y $\tilde{w}(z)$ son los mismos que los de las funciones $y(z)$ y $w(z)$ respectivamente, puesto que $z'(x) > 0$. A partir del sistema (4.5) construimos el siguiente cociente de soluciones (1.90):

$$H(z) := \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{w}(z)}. \quad (4.7)$$

Esta función tiene ceros y polos entrelazados, como consecuencia directa de las propiedades de entrelazado de ceros de $\tilde{y}(z)$ y $\tilde{w}(z)$ que hemos visto anteriormente. Además, los ceros de $H(z)$ coinciden con los ceros de $\tilde{y}(z)$, y $H(z)$ está relacionada con $\eta(z)$ por medio de una ecuación de Riccati:

$$\dot{H}(z) = K(1 + H^2(z) - 2\eta(z)H(z)). \quad (4.8)$$

Con todos estos ingredientes, el esquema iterativo que hemos visto en el primer capítulo (1.91):

$$T(z) = z - \arctan(H(z)) \quad (4.9)$$

converge globalmente a los ceros de $H(z)$ (y por tanto de $\tilde{y}(z)$, y de $y(x)$ por medio del cambio de variable), en intervalos donde la función $\eta(z)$ no cambia de signo. En el caso de que haya cambios de signo de la función $\eta(z)$ es posible adaptar el esquema para mantener las propiedades, véase [76].

Estos métodos de punto fijo se pueden utilizar para calcular los ceros reales de varias familias diferentes de funciones especiales clásicas, entre otras:

- Funciones de Bessel:

$$\mathcal{C}_\nu(x) = \cos(\alpha)J_\nu(x) + \sin(\alpha)Y_\nu(x), \quad (4.10)$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

- Funciones de Coulomb:

$$F_n(\gamma, x), G_n(\gamma, x), \quad (4.11)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

- Funciones cónicas:

$$P_{-1/2+i\tau}(x), Q_{-1/2+i\tau}(x), \quad (4.12)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$ y $P_\nu(x)$ y $Q_\nu(x)$ son funciones de Legendre.

- Funciones hipergeométricas confluentes:

$$M(a; c; x), U(a; c; x), \quad (4.13)$$

donde $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ y $x > 0$. Como casos particulares se incluyen los polinomios de Laguerre y Hermite.

- Funciones hipergeométricas de Gauss:

$${}_2F_1(a, b; c; x), \quad (4.14)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ y $x \in (0, 1)$. Como casos particulares se incluyen los polinomios de Jacobi (y dentro de estos los de Legendre, Chebyshev y Gegenbauer).

Estas familias, salvo las funciones irregulares de Coulomb y las funciones cónicas, están implementadas en el paquete de rutinas Maple **zerosSF**.

4.3. Aspectos computacionales

Como hemos visto, los métodos de punto fijo se construyen sobre cocientes de funciones hipergeométricas. Un aspecto clave del método es el estudio del problema de la evaluación de estos cocientes.

4.3.1. Cálculo de cocientes y fracciones continuas

En primer lugar es necesario determinar qué cocientes $H(z)$ deben calcularse, puesto que en el caso de las funciones hipergeométricas confluentes y de Gauss existen varias posibilidades a la hora de elegir funciones contiguas de una dada. Cada una de estas elecciones da lugar a un sistema de primer orden, a un cambio de variable $z = z(x)$ y a una iteración de punto fijo diferente. En la referencia [34] se estudian los cocientes más eficientes desde el punto de vista numérico para los diferentes rangos de parámetros. Este análisis incluye los distintos sistemas de DDEs (4.3) que se pueden construir, para diferentes pares de funciones contiguas, con las siguientes condiciones:

- Los coeficientes de dicho sistema deben ser funciones continuas en x , salvo en los puntos singulares de la ecuación diferencial correspondiente.
- El cambio de variable (4.4) debe presentar buenas propiedades numéricas en términos de la iteración de punto fijo que se construye posteriormente (en concreto se busca que la estimación inicial de un cero una vez calculado el anterior sea lo más exacta posible a fin de ahorrar iteraciones).

Por ejemplo, en el caso de las funciones hipergeométricas $y_n(x) = {}_0F_1(-; c+n; x)$ se consideran dos sistemas diferentes: el que relaciona $y_n(x)$ e $y_{n-1}(x)$ y el que relaciona $y_n(x)$ e $y_{n-2}(x)$. Si la diferencia entre los parámetros es superior a 2 la condición de continuidad de los coeficientes del sistema no se cumple. Como consecuencia, para las funciones de Bessel $J_\nu(x)$, que están relacionadas con esta familia de hipergeométricas (1.54), hay dos cocientes posibles, con diferentes propiedades según los valores de ν y x .

Una vez determinados los cocientes que se necesitan según los parámetros de la función, hay que elegir un método de evaluación. Como ya hemos visto en el capítulo anterior, los cocientes de funciones que son soluciones mínimas de relaciones de recurrencias a tres términos se pueden aproximar por medio de fracciones continuas, obtenidas a partir de dichas recurrencias. Si f_n es solución mínima de:

$$y_{n+1} + b_n y_n + a_n y_{n-1} = 0, \quad (4.15)$$

(una vez más omitimos la dependencia de x por brevedad) entonces:

$$H_n := \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{-a_n}{b_n +} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1} +} \frac{-a_{n+2}}{b_{n+2} +} \cdots \quad (4.16)$$

De esta manera, es necesario determinar primeramente si las funciones cuyos ceros queremos calcular son mínimas en las direcciones de recurrencia que indican los cocientes dados por [34]. Si la función que nos interesa es mínima entonces es posible que haya diferentes fracciones continuas disponibles (véanse por ejemplo las referencias [7, 48, 56]), y habrá que considerar los aspectos numéricos, como propiedades de convergencia, posibles fenómenos de pseudoconvergencia y métodos

de evaluación.

Supongamos que queremos evaluar el cociente (4.16) para un valor fijo del parámetro n . Existen varios métodos de evaluación numérica de fracciones continuas propuestos en la literatura, que se agrupan básicamente en dos grupos, evaluación backward y evaluación forward.

El método backward consiste en elegir un valor suficientemente grande, $N > n$, y fijar un valor de H_N . Este valor se puede obtener de estimaciones de la cola de la fracción continua, o mediante estimaciones a priori del error cometido al truncar la fracción continua. Estas estimaciones están estudiadas para determinados tipos de fracciones continuas, y se pueden consultar en [48, 56]. A continuación se utiliza la recurrencia:

$$H_k = \frac{-a_k}{b_k + H_{k+1}}, \quad k = N-1, N-2, \dots, n \quad (4.17)$$

Con este sencillo esquema podemos calcular H_n con un mínimo coste computacional, dados los coeficientes a_k y b_k . Véase [49] para un análisis numérico de este procedimiento.

Un problema evidente del método backward es la estimación satisfactoria del valor de N en el caso general, de tal forma que el H_n calculado aproxime el valor real con una cierta precisión dada. Los métodos forward eliminan este inconveniente. Un procedimiento inmediato es el siguiente: el k -ésimo aproximante de la fracción continua se puede escribir como

$$H_k = \frac{A_k}{B_k} := \frac{-a_n}{b_n} \frac{-a_{n+1}}{b_{n+1}} \frac{-a_{n+2}}{b_{n+2}} \dots \frac{-a_{n+k-1}}{b_{n+k-1}}, \quad (4.18)$$

donde los coeficientes A_k y B_k son respectivamente el k -ésimo *numerador* y el k -ésimo *denominador*. Con el fin de no sobrecargar la notación escribiremos $A_k \equiv A_{n,k}$ y $B_k \equiv B_{n,k}$ (y análogamente con las demás variables que dependen de n). En estas condiciones:

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = b_k \begin{pmatrix} A_{k-1} \\ B_{k-1} \end{pmatrix} + a_k \begin{pmatrix} A_{k-2} \\ B_{k-2} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

Con esta relación de recurrencia y los valores iniciales:

$$\begin{pmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

podemos calcular A_k y B_k de manera sencilla. Sin embargo, este método presenta varios inconvenientes, como la posible inestabilidad numérica y los overflow que pueden aparecer si en cociente A_k/B_k no es muy grande pero los factores A_k y B_k por separado sí lo son.

Teniendo en cuenta que lo que se necesita habitualmente son los cocientes A_k/B_k y no los factores por separado, es razonable pensar en algoritmos que calculen estos

cocientes sin pasar por los numeradores y denominadores de forma independiente. En este sentido, dos algoritmos ampliamente utilizados son el de Steed [39, 70] y el de Lentz-Thompson modificado [39, 70, 85]. En este trabajo utilizaremos este último algoritmo, que muestra flexibilidad para los distintos tipos de fracciones continuas y buenos resultados numéricos. Citamos aquí brevemente el algoritmo de manera esquemática por completitud.

El algoritmo de Lentz-Thompson modificado utiliza los cocientes $E_k = A_k/A_{k-1}$ y $D_k = B_{k-1}/B_k$, y calcula los aproximantes de la fracción continua como $H_k = H_{k-1}E_kD_k$. Los factores E_k y D_k satisfacen relaciones de recurrencia a dos términos:

$$E_k = b_k + \frac{a_k}{E_{k-1}}, \quad D_k = \frac{1}{a_k D_{k-1} + b_k}. \quad (4.21)$$

Las dificultades que pueden surgir cuando E_k o D_k son cero o próximos a cero se resuelven tomando $E_k = \epsilon$ o bien $D_k = \epsilon$, donde ϵ es un parámetro pequeño tal que $1/\epsilon$ no produce overflow.

- Datos de entrada: a_k, b_k, ϵ .
- $H_0 = b_0$.
- Si $b_0 = 0$ entonces $H_0 = \epsilon$.
- $E_0 = H_0, D_0 = 0$.
- Para $k = 1, 2, \dots$
 - $D_k = a_k D_{k-1} + b_k$
 - Si $D_k = 0$ entonces $D_k = \epsilon$.
 - $E_k = a_k E_{k-1} + b_k$
 - Si $E_k = 0$ entonces $E_k = \epsilon$.
 - $D_k = 1/D_k$.
 - $\Delta_k = D_k E_k$.
 - $H_k = \Delta_k H_{k-1}$.

Cuando se cumple una condición del tipo $|1 - \Delta_k| < \epsilon_m$, donde ϵ_m es de orden épsilon máquina, el algoritmo se detiene.

4.3.2. Tests numéricos

El programa Maple dispone de rutinas internas para la evaluación de funciones hipergeométricas, como por ejemplo `KummerM(a,c,x)`, `KummerU(a,c,x)`. A la hora de programar el algoritmo de cálculo de ceros en Maple, una consideración importante es decidir si la evaluación de los cocientes necesarios en el algoritmo se realiza

mediante fracciones continuas o bien utilizando las rutinas internas de Maple. Normalmente esta decisión depende de los rangos de parámetros en los que nos movamos, puesto que la eficiencia de Maple puede variar mucho de unas zonas a otras.

En las secciones siguientes analizamos este aspecto computacional para las diferentes familias de funciones, realizando las siguientes pruebas:

- Comprobación de la precisión en el cálculo con las fracciones continuas disponibles. Este test se realiza comparando con la correspondiente rutina Maple con barridos aleatorios.
- Una vez determinadas las zonas donde son válidas las diferentes fracciones continuas se hace una comparación de tiempo de CPU respecto a la correspondiente rutina Maple en dichas regiones.
- Cuando se pueden delimitar zonas donde la fracción continua o Maple son claramente superiores se intenta llevar a cabo un ajuste por medio de una función que dependa de los parámetros, de manera que el algoritmo pueda elegir de manera sencilla el método de evaluación.

4.4. Funciones de Bessel

El algoritmo implementado en **zerosSF** puede calcular los ceros reales de las funciones de Bessel:

$$C_\nu(x) = \cos(\alpha)J_\nu(x) + \sin(\alpha)Y_\nu(x), \quad (4.22)$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$ y $x > 0$. Estas funciones tienen infinitos ceros reales positivos, como se puede ver en [88].

4.4.1. Cocientes y fracciones continuas

Cuando $\cos(\alpha) = \pm 1$ tenemos solamente la función de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$. Como se explica en [34], los cocientes más eficientes desde el punto de vista numérico son los siguientes cocientes:

$$R_1(x) := \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)}, \quad R_2(x) := \frac{J_{\nu+2}(x)}{J_\nu(x)} \quad (4.23)$$

El primero debe usarse cuando $\nu < 100$ y cuando $\nu > 100$ y $x > \sqrt{2}\nu$, y el segundo cuando $\nu > 100$ y $x < \sqrt{2}\nu$.

La función $J_\nu(x)$ es solución mínima de la recurrencia en la dirección de ν creciente [31, 82]:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad (4.24)$$

y por lo tanto podemos utilizar la fracción continua asociada, que converge al cociente de funciones $J_\nu(x)$:

$$H^{(1)}(x) := \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)} = \frac{x}{2(\nu+1)+} \frac{-x^2}{2(\nu+2)+} \frac{-x^2}{2(\nu+3)+} \cdots \quad (4.25)$$

Para el segundo cociente de (4.23) podemos usar la siguiente fracción continua:

$$H^{(2)}(x) := \frac{J_{\nu+2}(x)}{J_\nu(x)} = \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots, \quad (4.26)$$

donde

$$a_1 = \nu + 3, \quad a_m = -(\nu + 2m + 1)(\nu + 2m - 3), \quad m \geq 2, \quad (4.27)$$

$$b_m = -2(\nu + 2m) + 4 \frac{(\nu + 2m - 1)(\nu + 2m)(\nu + 2m + 1)}{x^2}, \quad m \geq 1. \quad (4.28)$$

Esta expresión se puede obtener operando con la identidad (4.24), véanse también [6, 43].

4.4.2. Aspectos numéricos

De acuerdo con el esquema que hemos presentado antes, llevamos a cabo un primer test de precisión de las fracciones continuas (4.25) y (4.26) respecto a la rutina interna de Maple `BesselJ(nu, x)`, en las regiones que hemos delimitado anteriormente. El cálculo se ha realizado con 40 dígitos, y se ha fijado el umbral de precisión en 5 dígitos menos. Se han llevado a cabo barridos aleatorios de 5.000 puntos en cada una de las regiones, y los puntos en los gráficos siguientes indican valores para los cuales el error relativo entre el resultado de la fracción continua y el de la subrutina de Maple es menor que dicho umbral de tolerancia.

Estos gráficos indican que ambas fracciones continuas (4.25) y (4.26) son satisfactorias en las regiones correspondientes. Una vez que se ha comprobado la precisión se estudia cada una de las fracciones continuas por separado en su dominio para analizar si el cálculo del cociente es más eficiente con la fracción continua que mediante dos llamadas a la rutina `BesselJ(nu, x)`. Al igual que antes se han utilizado barridos aleatorios de 5.000 puntos en el plano (ν, x) . Los puntos negros indican valores para los cuales la fracción continua es más rápida, mientras que los puntos grises señalan que Maple tarda menos en calcular.

En el primer gráfico de la figura 4.2 se ha dibujado la parábola:

$$x = \frac{11}{480}\nu^2 - \frac{13}{24}\nu + 50. \quad (4.29)$$

Esta función se utilizará como estimación de separación entre las dos zonas cuando $\nu < 100$. En el segundo gráfico se ha dibujado tanto la recta $x = \sqrt{2}\nu$ como:

$$x = \frac{7\nu - 100}{3}, \quad (4.30)$$

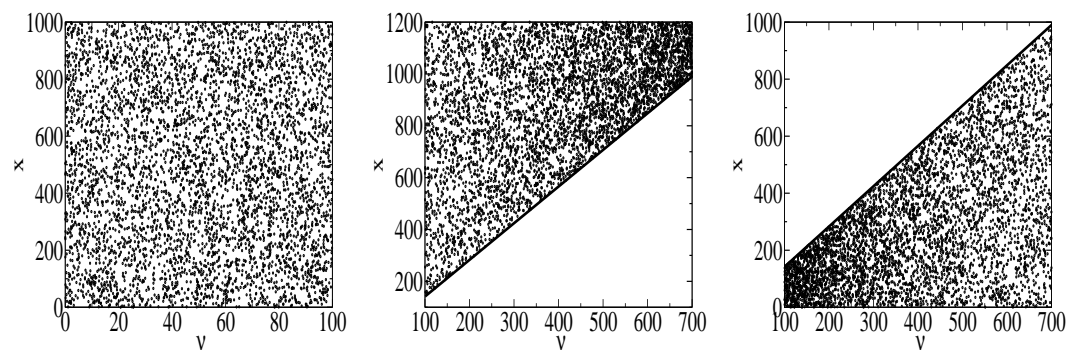


Figura 4.1: Gráficos de precisión de las fracciones continuas para las funciones de Bessel $J_\nu(x)$. Los puntos negros indican coincidencia de la fracción continua y de Maple. Izquierda: Precisión de la fracción continua (4.25), cuando $\nu < 100$. Centro: Precisión de la fracción continua (4.25), cuando $\nu > 100$ y $x > \sqrt{2}\nu$. Se incluye la recta $x = \sqrt{2}\nu$. Derecha: Precisión de la fracción continua (4.26), cuando $\nu > 100$ y $x < \sqrt{2}\nu$. Se incluye la recta $x = \sqrt{2}\nu$.

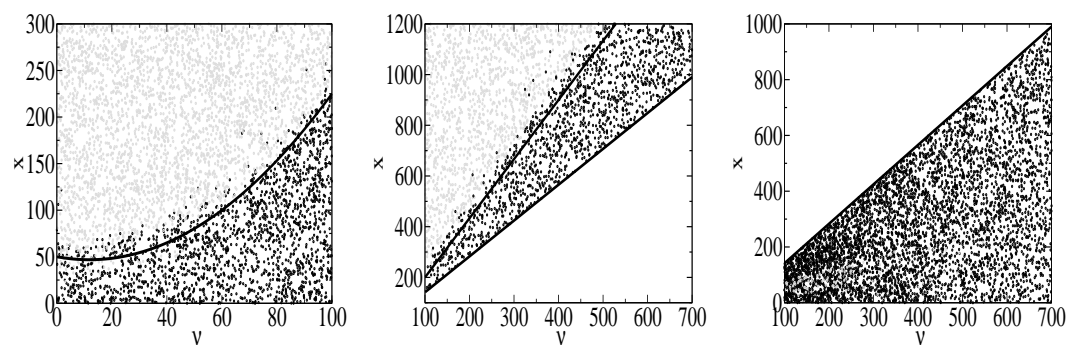


Figura 4.2: Comparación de tiempos entre Maple y la fracción continua. Los puntos negros indican zonas donde la fracción continua es más rápida, los puntos grises zonas donde es superior Maple. Izquierda: fracción continua (4.25), cuando $\nu < 100$. Se incluye la parábola (4.29). Centro: misma comparación entre Maple y (4.25), cuando $\nu > 100$ y $x > \sqrt{2}\nu$. Se incluye la recta $x = \sqrt{2}\nu$ y la recta (4.30). Derecha: misma comparación entre Maple y (4.26), cuando $\nu > 100$ y $x < \sqrt{2}\nu$. Se incluye la recta $x = \sqrt{2}\nu$.

que una vez más delimitará las zonas donde se utiliza la rutina de Maple o la fracción continua (4.25). En la tercera gráfica se ha incluido la recta $x = \sqrt{2}\nu$ y se observa que (4.26) es más eficiente que Maple en esta región.

Es importante señalar que la representación por medio de fracciones continuas solamente es válida cuando se calculan los ceros de la función de Bessel $J_\nu(x)$. En el caso de una combinación de funciones de primera y segunda especie la única posibilidad en el contexto de **zerosSF** es evaluar el cociente por medio de las rutinas internas de Maple.

4.5. Funciones de Coulomb

Las funciones de Coulomb son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y''(x) + \left[1 - \frac{2\gamma}{x} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]y(x) = 0, \quad (4.31)$$

donde $x > 0$, γ es real y n es un entero no negativo. Un par de soluciones independientes está formado por la *función regular de Coulomb* $F_n(\gamma, x)$ y la *función irregular de Coulomb* $G_n(\gamma, x)$. La función regular está relacionada con la función de Kummer $M(a; c; x)$ con parámetros y variable compleja [1, 14.1.3]:

$$F_n(\gamma, x) = C_n(\gamma)x^{n+1}e^{-ix}M(n+1-i\gamma, 2n+2, 2ix), \quad (4.32)$$

donde

$$C_n(\gamma) = \frac{2^n e^{-\pi\gamma/2} |\Gamma(n+1+i\gamma)|}{\Gamma(2n+2)}. \quad (4.33)$$

El algoritmo es capaz de calcular los ceros reales de la función regular de Coulomb, por medio de la siguiente fracción continua: definimos $R_k := \sqrt{(n+k)^2 + \gamma^2}$, y

$$\frac{F_{n+1}(\gamma, x)}{F_n(\gamma, x)} = \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \dots, \quad (4.34)$$

donde

$$a_1 = (n+2)R_1x, \quad a_k = -(n+k-1)(n+k+1)R_k^2x^2, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (4.35)$$

$$b_k = (2n+2k+1)[(n+k)(n+k+1) + \gamma x], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.36)$$

En el caso de las funciones de Coulomb no hay rutina interna en Maple, de modo que los cocientes deben calcularse por medio de la fracción continua indicada. Para la función irregular de Coulomb $G_n(\gamma, x)$ no hay fracción continua disponible, ni función Maple, por lo que estas funciones no se han incluido en el algoritmo. Sí que existen algoritmos en Fortran, como por ejemplo [85].

4.6. Función hipergeométrica confluyente $M(a; c; x)$

La función hipergeométrica de primera especie $M(a; c; x)$ tiene ceros reales positivos si los parámetros verifican las condiciones $a < 0$, $c - a > 1$. En este trabajo nos limitaremos al caso en el que a , c y x son reales, y es importante señalar que podemos restringir el análisis a $x > 0$, debido a la transformación de Kummer [1]:

$$M(a; c; x) = e^x M(c - a; c; -x). \quad (4.37)$$

Los ceros reales positivos de $M(a; c; x)$ están acotados, una propiedad que puede comprobarse escribiendo la ecuación diferencial (1.28) en forma normal:

$$y''(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{c - 2a}{2x} + \frac{c(2 - c)}{4x^2} \right) y(x) = 0. \quad (4.38)$$

Es directo comprobar que los turning points son:

$$x_{\pm} = c - 2a \pm \sqrt{(c - 2a)^2 + c(2 - c)}. \quad (4.39)$$

Cuando $x > x_+$ y cuando $x < x_-$ el término independiente de la ecuación (4.38) es negativo, y como consecuencia de los teoremas de Sturm [82] la función $M(a; c; x)$ sólo puede tener a lo sumo un cero en dicha región. De hecho [25] la función $M(a; c; x)$ tiene un número finito de ceros reales cuando los parámetros a y c son reales.

Cuando $a = -n$ es un entero negativo se obtienen los polinomios clásicos de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, donde $c = \alpha + 1$.

4.6.1. Cocientes y fracciones continuas

Para aplicar el método de punto fijo para el cálculo de los ceros reales de $M(a; c; x)$ se necesitan los siguientes cocientes (una vez más omitimos la dependencia de x):

$$R_{1,1} := \frac{M(a + 1; c + 1; x)}{M(a; c; x)}, \quad (4.40)$$

cuando $x < c - a$, y

$$R_{1,0} := \frac{M(a + 1; c; x)}{M(a; c; x)}, \quad (4.41)$$

cuando $x > c - a$. Estos son los cocientes más eficientes desde el punto de vista numérico, como se explica en [34].

Cuando $x < c - a$ es necesario utilizar la iteración $(++)$, incrementando los dos parámetros, y $M(a; c; x)$ es mínima en dicha dirección de recurrencia (véase capítulo 1 o la referencia [83]). La fracción continua que se obtiene a partir de la recurrencia es la siguiente:

$$H_1 := \frac{c}{c - x +} \frac{(a + 1)x}{c + 1 - x +} \frac{(a + 2)x}{c + 2 - x +} \dots, \quad (4.42)$$

es decir

$$a_1 = c, \quad a_m = (a + m - 1)x, \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.43)$$

$$b_m = c + m - 1 - x, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

Esta fracción continua converge al cociente $R_{1,1}$ para $x \in \mathbb{R}$. Si a es un entero negativo entonces la fracción continua es finita y la función hipergeométrica confluyente se reduce a un polinomio de tipo Laguerre. Los cambios de signo de numerador y denominador se producen en $m_0 = x + 1 - c$ y $m_1 = 1 - a$. Como $x < c - a$ es directo ver que $m_0 < m_1$, de modo que:

	$m_0 = x + 1 - c$		$m_1 = 1 - a$	
	+-----+-----+-----+			
Signo de a_m	-	-	+	+
Signo de b_m	-	+	+	+

Teniendo en cuenta el criterio de signos expuesto en [13] no es de esperar ningún fenómeno de pseudoconvergencia, lo cual se confirma más adelante con los experimentos numéricos.

Cuando $x > c - a$ hay que utilizar el cociente que corresponde a la iteración $(+0)$. En este caso la fracción continua que resulta de la recurrencia $(+0)$ no es útil, puesto que la función $M(a + n; c; x)$ es dominante cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, podemos utilizar el algoritmo QD [48, 56] para construir la siguiente fracción C a partir de la serie de potencias de (4.41):

$$H_2 := a_0 + \frac{a_1 x}{1+} \frac{a_2 x}{1+} \frac{a_3 x}{1+} \dots, \quad (4.45)$$

donde $a_0 = 1$, $a_1 = 1/c$, y:

$$a_{2m} = \frac{a + 1 - c - m}{(c + 2m - 2)(c + 2m - 1)}, \quad m \geq 1 \quad (4.46)$$

$$a_{2m+1} = \frac{a + m}{(c + 2m - 1)(c + 2m)}, \quad m \geq 1 \quad (4.47)$$

Esta fracción continua converge al cociente $M(a + 1; c; x)/M(a; c; x)$ en subconjuntos compactos de \mathbb{R} excepto en los ceros de la función $M(a; c; x)$. Sin embargo, es importante señalar que esta fracción continua presenta pseudoconvergencia cuando x es grande, y por lo tanto no debe utilizarse para el cálculo de los ceros más grandes de $M(a; c; x)$. Para ver esto aplicamos una contracción estándar [56, pg. 83] a la fracción continua (4.45), y el resultado es una fracción continua con la siguiente estructura:

$$H_2^* := c_0 + \frac{c_1}{d_1+} \frac{c_2}{d_2+} \frac{c_3}{d_3+} \dots, \quad (4.48)$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 = 1, & c_1 &= a_1 x = \frac{x}{c}, \\ d_1 &= a_2 x + 1 = 1 + \frac{(a-c)x}{c(c+1)} \\ c_m &= -a_{2m-1}a_{2m-2}x^2 = \frac{(c+m-2-a)(a+m-1)x^2}{(c+2m-4)(c+2m-3)^2(c+2m-2)}, & m \geq 2, \\ d_m &= 1 + a_{2m}x + a_{2m-1}x = \frac{(c+2m-1)(c+2m-3) - (c-2a-1)x}{(c+2m-1)(c+2m-3)} \end{aligned}$$

El coeficiente c_m es negativo cuando $m-1 < -a$, y es positivo cuando $m-1 > -a$. El coeficiente d_m es negativo cuando $m_- < m < m_+$ y es positivo cuando $m > m_+$, donde:

$$m_{\pm} = 1 - \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + x(c-2a-1)}. \quad (4.49)$$

Si $x < c - 2a + 1$ entonces:

$$m_+ < 1 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (c-2a+1)(c-2a-1)} = 1 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(c-2a) = -a + 1.$$

Por lo tanto, cuando $x < c - 2a + 1$ resulta que el coeficiente d_m cambia de signo (de negativo a positivo) antes de que cambie c_m , y no es esperable que haya pseudoconvergencia, de acuerdo con el criterio de signos explicado anteriormente [12]. Por otra parte, si $x > c - 2a + 1$ entonces $m_+ > -a + 1$, con un cálculo análogo al anterior, y d_m cambia de signo (de negativo a positivo) cuando el numerador c_m ya es positivo. En este caso hay pseudoconvergencia y por tanto pérdida de precisión en el cálculo, como puede verse en los gráficos que presentamos más adelante.

Por este motivo, en el algoritmo general se cambiará de (4.45) a (4.50) cuando $x = c - 2a$. Por otro lado, veremos que cuando $c - a < x < c - 2a$ la fracción continua (4.45) proporciona un método de cálculo eficiente.

Cuando x es grande es posible utilizar el hecho de que la función $M(a; c; x)$ es mínima en la dirección de recurrencia $(0+)$, es decir, cuando incrementamos el parámetro c . Esto da lugar a la siguiente fracción continua:

$$\frac{c}{c+x+} - \frac{(c+1-a)x}{c+1+x+} - \frac{(c+2-a)x}{c+2+x+} \dots, \quad (4.50)$$

Esta fracción continua converge al cociente $M(a; c+1; x)/M(a; c; x)$, y no presenta pseudoconvergencia dentro de las condiciones (2.2). Una vez calculado este cociente se puede obtener el que se necesita en la dirección $(+0)$ por medio de la siguiente relación de recurrencia a tres términos [1]:

$$\frac{M(a+1; c; x)}{M(a; c; x)} = \frac{c}{c-x} \frac{M(a+1; c+1; x)}{M(a+1; c; x)} \quad (4.51)$$

Esto proporciona la siguiente fracción continua para el cociente $R_{1,0}$:

$$H_3 := \frac{1}{1+} \frac{-x}{c+x+} \frac{-(c-a)x}{c+1+x+} \frac{-(c+1-a)x}{c+2+x+} \frac{-(c+2-a)x}{c+3+x+} \dots, \quad (4.52)$$

4.6.2. Aspectos numéricos

El algoritmo calcula las fracciones continuas (4.42), (4.45) y (4.52). La primera se utiliza cuando $x < c - a$, y las otras dos cuando $x > c - a$.

Primeramente se realiza un análisis de la precisión de las fracciones continuas anteriores, comparando con la rutina interna de Maple `KummerM(a,c,x)`. En los plots siguientes se fijan varios valores del parámetro a y se realizan barridos aleatorios en el plano (c, x) . Los cálculos se han llevado a cabo con 40 dígitos, y el umbral de precisión se ha fijado en cinco dígitos menos. Los puntos negros indican puntos en los que el error relativo entre el resultado dado por la fracción continua correspondiente y Maple es menor que dicho umbral. También se han representado la recta $x = c - a$ en el caso de la primera fracción, y las dos rectas $x = c - a$ y $x = c - 2a$ en los otros dos casos.

Los gráficos situados a la izquierda en las gráficas 4.3, 4.4 y 4.5 indican que la primera fracción continua (4.42) se puede utilizar cuando $x < c - a$. Cuando $x > c - a$ y x no es demasiado grande la segunda fracción continua calcula correctamente, pero la precisión alcanzable disminuye cuando x es grande (gráficos centrales). Esta pérdida de precisión corresponde a la fracción continua (4.45) y no a Maple, y es debida a pseudoconvergencia, como hemos visto antes (la tercera fracción continua (4.50) coincide con Maple en la región completa, como puede verse en los gráficos de la derecha).

Las pruebas numéricas indican que es posible utilizar también la fracción continua (4.50) cuando $x > c - a$, a efectos de precisión. No obstante, (4.45) parece ser más eficiente para valores moderados de x en términos de tiempo de CPU, de modo que se han mantenido las tres fracciones continuas en el programa para estudiar el tiempo empleado por el algoritmo. Si comparamos la segunda y tercera fracción continua en la zona $c - a < x < c - 2a$ obtenemos que (4.45) es generalmente más rápida, como se muestra en la figura 4.6.

Una vez comprobada la precisión tenemos que comparar tiempos de CPU para la evaluación mediante fracciones continuas y Maple, de modo que se pueda establecer cuál es el método más eficiente en función de los parámetros. De esta manera, se puede elegir la mejor manera que evaluar el cociente necesario dentro del algoritmo de cálculo de ceros.

Las comparaciones de tiempos de computación se han llevado a cabo nuevamente fijando diferentes valores de a , y realizando barridos en c y en x y comparando el

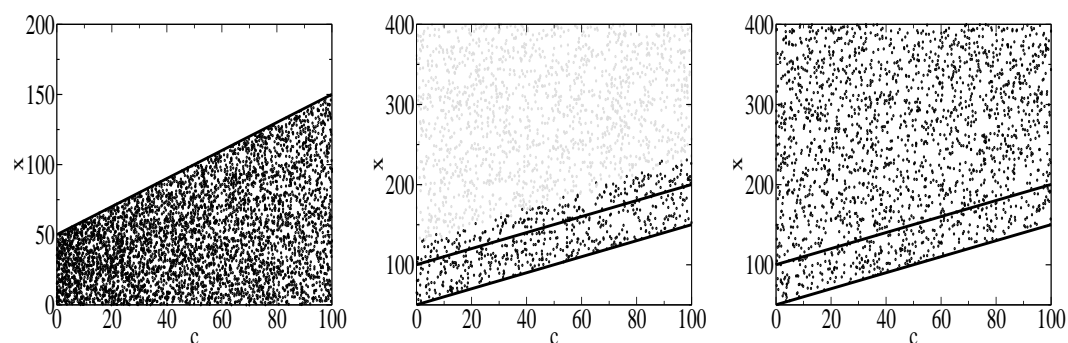


Figura 4.3: Gráficos de precisión cuando $a = -50, 1$, con 5.000 puntos aleatorios en las diferentes regiones. Izquierda: barrido para comprobar la precisión de la fracción continua (4.42) cuando $x < c - a$. Centro: barrido para comprobar (4.45) cuando $x > c - a$. Derecha: barrido para comprobar (4.50) cuando $x > c - a$. Se incluyen las rectas $x = c - a$ (a la izquierda) y tanto $x = c - a$ como $x = c - 2a$ (centro y derecha).

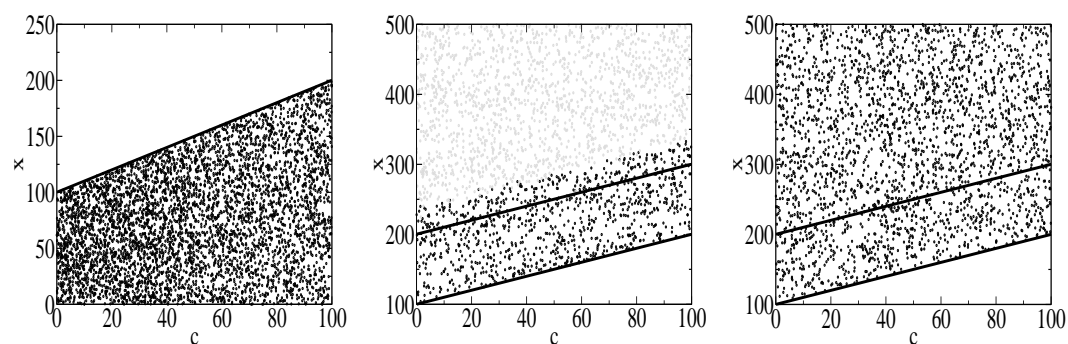


Figura 4.4: Gráficos similares a los de la figura 4.3, pero con $a = -100, 1$.

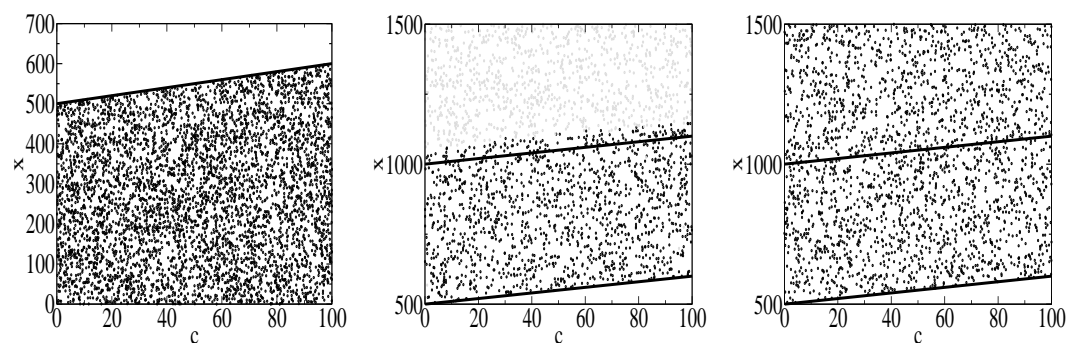


Figura 4.5: Gráficos similares a los de las figuras 4.3 y 4.4, pero con $a = -500, 1$.

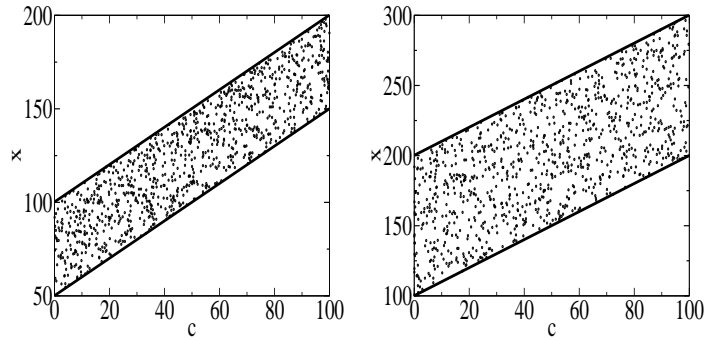


Figura 4.6: Comparación de tiempos de computación de las fracciones continuas (4.45) y (4.50) en la región $c - a < x < c - 2a$. Se incluyen estas dos rectas. Izquierda: $a = -50,1$. Derecha: $a = -100,1$. Se han utilizado 1.000 puntos aleatorios, y los puntos indican valores para los cuales (4.45) es más rápida.

resultado de la fracción continua con la subrutina interna de Maple. Con el objetivo de asegurar un número de cálculos significativo en ambos casos se han incluido bucles de repetición, con valores de los parámetros ligeramente distintos en cada llamada. De esta forma los resultados realmente se calculan en cada caso, en lugar de guardarse en memoria, lo cual puede falsear la medición de tiempos. En la figura 4.7 los puntos negros indican valores para los cuales la fracción continua es más rápida, mientras que los grises corresponden a puntos donde Maple es más eficiente.

Después de varios tests con valores fijos de a la fracción continua es aparentemente superior cuando x y/o a son grandes, mientras que Maple es más rápido para valores grandes de c . Por último, se ha llevado a cabo un ajuste por mínimos cuadrados con el fin de obtener una condición en términos de los parámetros de la función que nos permita elegir el método más eficiente en el algoritmo general.

Además de los valores numéricos mostrados en los gráficos se han generado otros similares para los casos $a = -75,1$, $a = -125,1$, $a = -150,1$, $a = -200,1$, $a = -250,1$, $a = -300,1$, $a = -325,1$, $a = -350,1$, $a = -400,1$, $a = -425,1$ y $a = -450,1$, utilizando barridos aleatorios en el plano (c, x) , con el fin de obtener un ajuste más fino.

Para cada valor del parámetro a , una línea recta en el plano (c, x) separa aproximadamente las zonas donde Maple o la fracción continua es superior. Estas rectas son de la forma $x = mc + l$, donde m, l son constantes positivas y decrecen cuando $|a|$ aumenta (véase Figura 5). Se ha utilizado un método de mínimos cuadrados con el fin de ajustar los valores de m y l , para valores de $|a|$ entre 50 y 500, y se ha obtenido la siguiente función:

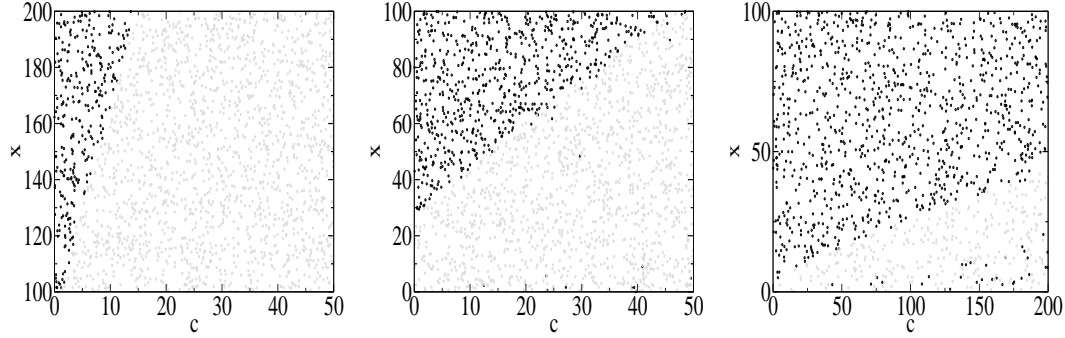


Figura 4.7: Comparación de tiempos de las fracciones continuas (4.42), (4.45), (4.50) y Maple. Izquierda: $a = -50,1$. Centro: $a = -100,1$. Derecha: $a = -500,1$. Se han utilizado 2.000 puntos aleatorios en cada caso. Los puntos negros indican valores para los cuales la fracción continua es más rápida, mientras que los grises representan valores donde Maple es más eficiente.

$$f(a, c, x) = -x + \frac{A_1}{(-a)^{A_2}}c + \frac{A_3}{(-a)^{A_4}}, \quad (4.53)$$

donde las constantes A_1 , A_2 , A_3 and A_4 son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2408,34053856, & A_2 &= 1,54481656539 \\ A_3 &= 5182,04072142, & A_4 &= 1,02340314593 \end{aligned}$$

Dados a , c y x , la fracción continua debe ser utilizada si $f(a, c, x) < 0$. Se han llevado a cabo varias pruebas para comprobar si el ajuste es correcto: se calculan valores aleatorios de a , c y x en los intervalos $(-500, -50)$, $(0, 200)$ y $(0, 1000)$ respectivamente, y se comprueban de nuevo los tiempos de cálculo de la fracción continua y de Maple en el caso de que $f(a, c, x) < 0$ para dichos valores de los parámetros. Si el ajuste es correcto este test debería ser favorable al cálculo mediante fracciones continuas. En todos los casos considerados la proporción de puntos en las regiones consideradas donde la fracción continua es realmente más rápida que Maple es superior al 90 %, siendo casi el 100 % en la mayoría de los ejemplos analizados.

4.7. Función hipergeométrica confluyente $U(a; c; x)$

De manera similar a lo que ocurre con la función de primera especie $M(a; c; x)$, necesitamos los siguientes cocientes:

$$R_{1,1} := \frac{U(a+1; c+1; x)}{U(a; c; x)}, \quad (4.54)$$

cuando $x < c - a$, y

$$R_{1,0} := \frac{U(a+1; c; x)}{U(a; c; x)}, \quad (4.55)$$

cuando $x > c - a$.

La función $U(a; c; x)$ es dominante en la dirección $(++)$, y no hay pseudoconvergencia cuando x es grande (véase el capítulo anterior), de modo que no podemos utilizar la fracción continua asociada a la recurrencia $(++)$ para calcular (4.54). En ese sentido, la evaluación de la función $U(a; c; x)$ en la región $x < c - a$ es problemática.

Sin embargo, si consideramos la dirección $(+0)$, es decir, incrementando solamente el primer parámetro, la función $U(a; c; x)$ es mínima, y la fracción continua correspondiente es:

$$H_1 := \frac{U(a+1; c; x)}{U(a; c; x)} = \frac{1}{2a+2+x-c+} \frac{(a+1)(c-a-2)}{2a+4+x-c+} \frac{(a+2)(c-a-3)}{2a+6+x-c+} \dots \quad (4.56)$$

Es decir,

$$a_1 = 1, \quad a_m = (a+m-1)(c-a-m), \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (4.57)$$

$$b_m = 2a + 2m + x - c, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.58)$$

Es importante señalar que, de acuerdo con la tabla que hemos presentado anteriormente, la función U es dominante en las direcciones $(0+)$, $(0-)$, $(++)$ y $(--)$, y no hay muchas posibilidades de utilizar las direcciones $(+-)$ o $(-+)$, habida cuenta de las identidades de Kummer y lo visto en el capítulo anterior.

4.7.1. Métodos de cálculo y tiempo de computación

La fracción continua (4.56) es una fracción M en la variable $t = 1/x$ [56]. Hay tres valores de m donde los numeradores o los denominadores de esta fracción continua cambian de signo: $m_0 = (c-x)/2 - a$, $m_1 = c - a$ y $m_2 = 1 - a$. No es complicado probar que $m_0 < m_2$ cuando $x > c - a$ y se cumplen las condiciones de oscilación. Los otros dos puntos de cambio de signo pueden aparecer en un orden u otro. Cuando $c < 1$ el esquema de signos es el siguiente:

	$m_0 = \frac{c-x}{2} - a$		$m_1 = c - a$		$m_2 = 1 - a$	
Signo de a_m	-	-		+		-
Signo de b_m	+	-		-		-

Cuando $c > 1$:

	$m_0 = \frac{c-x}{2} - a$		$m_2 = 1 - a$		$m_2 = c - a$	
Signo de a_m	-	-		+		-
Signo de b_m	+	-		-		-

Ninguno de estos dos casos corresponde al fenómeno de pseudoconvergencia comentado en el capítulo anterior. Las pruebas numéricas indican que la fracción continua 4.56 es numéricamente segura en la región $x > c - a$.

El análisis de la precisión de la fracción continua (4.56) se lleva a cabo de manera similar al caso de la función $M(a; c; x)$. En este caso la rutina interna de Maple que sirve para comprobar es `KummerU(a, c, x)`. En los plots siguientes se fijan varios valores del parámetro a y se realizan barridos aleatorios en el plano (c, x) . Los cálculos se han llevado a cabo con 40 dígitos, y el umbral de precisión se ha fijado en cinco dígitos menos. Los puntos negros indican puntos en los que el error relativo entre el resultado dado por la fracción continua correspondiente y Maple es menor que dicho umbral. También se han representado la recta $x = c - a$. Como puede verse los resultados son satisfactorios.

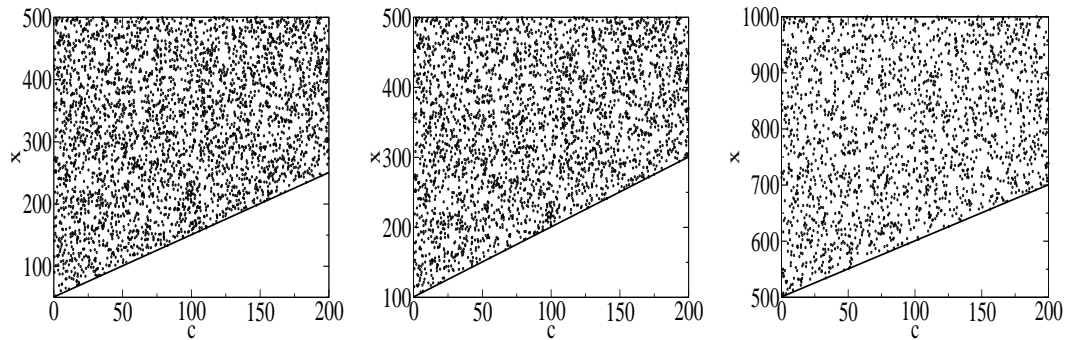


Figura 4.8: Gráficos de precisión en el cálculo del cociente $R_{1,0}(x)$ dado por (4.55), en la región $x > c - a$. Izquierda: $a = -50,7$. Centro: $a = -100,7$. Derecha: $a = -500,7$. En cada caso se incluye la recta $x = c - a$.

Las comprobaciones de tiempo de CPU son también favorables a la utilización de la fracción continua.

4.8. Función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$

En el caso de las funciones hipergeométricas de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$, las condiciones de oscilación en el intervalo $(0, 1)$ son (2.2):

$$a < 0, \quad b > 1, \quad c > a + 1, \quad c < b. \quad (4.59)$$

Para calcular los ceros en $(0, 1)$ se necesita el siguiente cociente [34]:

$$R_{1,1,1} := \frac{{}_2F_1(a, b; c; x)}{{}_2F_1(a + 1, b + 1; c + 1; x)}. \quad (4.60)$$

La fracción continua asociada a la recurrencia $(+ + +)$ es la fracción de Nørlund [47, 56]:

$$H_1 := \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots, \quad (4.61)$$

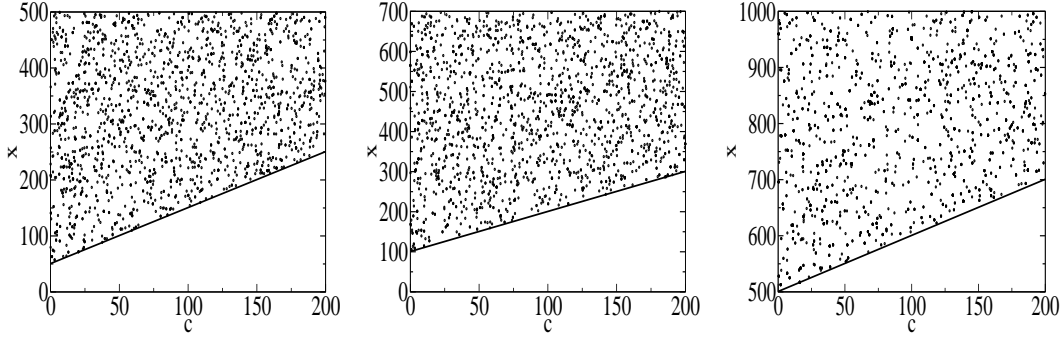


Figura 4.9: Comparación de tiempos de la fracción continua (4.56) respecto a Maple. Izquierda: $a = -50,7$. Centro: $a = -100,7$. Derecha: $a = -500,7$. Se han utilizado 2.000 puntos aleatorios en cada caso. Los puntos negros indican valores para los cuales la fracción continua es más rápida.

donde

$$a_1 = 1, \quad a_m = \frac{(a + m - 1)(b + m - 1)x(1 - x)}{(c + m - 2)(c + m - 1)}, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (4.62)$$

$$b_m = 1 - \frac{(a + b + 2m - 1)x}{c + m - 1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.63)$$

Esta fracción continua corresponde al cociente (4.60) cuando $x < 1/2$, y converge a dicho cociente cuando $0 < x < 1/2$. Sin embargo, es necesario tener cuidado con los posibles casos de pseudoconvergencia, que se dan cuando $n_0 > 0$, donde n_0 viene dado por (3.110):

$$n_0 = \frac{c - 1 - (a + b + 1)x}{2x - 1}. \quad (4.64)$$

Alternativamente, se puede utilizar la siguiente expresión [27]:

$$H_2 := \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots, \quad (4.65)$$

donde

$$a_1 = c, \quad a_m = -(b + m - 1)(c + m - 2 - a)x, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (4.66)$$

$$b_1 = c - ax, \quad b_m = (b + m - 1 - a)x + c + m - 1, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (4.67)$$

Esta fracción continua converge al cociente $R_{1,1,1}(x)$ en el intervalo $x \in (0, 1)$ [27, pg. 463]. Además, observamos que $a_m < 0$ y $b_m > 0$, teniendo en cuenta las condiciones de oscilación (2.2), de modo que no se produce pseudoconvergencia.

Las pruebas numéricas realizadas son las siguientes:

- Comprobación de precisión en el cálculo utilizando (4.61) y (4.65). En ambos casos los resultados son satisfactorios en las regiones donde las fracciones continuas convergen y evitando las zonas de pseudoconvergencia.
- Comparación de tiempos respecto al cálculo con la rutina predefinida de Maple para las funciones de Gauss, `hypergeom([a,b],[c],x)`. Al igual que ocurría en el caso de las hipergeométricas confluentes, cuando a , b o x son grandes la fracción continua es más rápida que Maple, mientras que éste resulta favorecido cuando el parámetro c crece.

En el algoritmo resulta demasiado costoso comprobar si se puede utilizar la fracción (4.61) en cada caso, puesto que esto debería analizarse en cada evaluación del cociente (ya que n_0 depende de x). Por ello se opta por emplear (4.65), que no presenta problemas numéricos. Asimismo, el ajuste preciso de una función $f(a, b, c, x)$ que permita elegir un método de evaluación u otro dependiendo de los parámetros resulta poco práctico en este caso, teniendo en cuenta que el ajuste debe hacerse en cuatro variables. Por ello en el algoritmo se ha optado por una división más sencilla de las zonas donde se aplica cálculo con fracción continua o Maple:

- Si el parámetro c es suficientemente grande (se ha tomado el valor $c = 1000$) se considera que la evaluación con Maple es más rápida, y se opta por este método directamente.
- Si $c < 1000$ entonces se estudian los valores de a y b : si $|a|, |b| > 150$ entonces el cálculo se lleva a cabo mediante la fracción continua (4.65), en otro caso la evaluación se hace con Maple.

El comportamiento de la rutina Maple y de la fracción continua es diferente según los valores de x en el intervalo $(0, 1)$, pero una selección de método en función de esta variable es prohibitiva, puesto que la comprobación correspondiente debería llevarse a cabo en cada evaluación del cociente de funciones dentro del algoritmo.

4.9. Conclusiones y problemas relacionados

En este capítulo se presenta un método de punto fijo que permite calcular los ceros reales de diversas familias de funciones especiales (Bessel, Coulomb, hipergeométricas confluentes e hipergeométricas de Gauss). Este algoritmo está construido sobre la teoría expuesta en las referencias [40, 41, 75], y en el contexto de este trabajo aún los resultados expuestos sobre los ceros de las funciones hipergeométricas con las propiedades numéricas de las relaciones de recurrencia a tres términos y las fracciones continuas asociadas, las cuales se utilizan como método de evaluación de los cocientes de funciones hipergeométricas que aparecen en el algoritmo.

Este capítulo toca de manera parcial una cuestión mucho más general, que es la evaluación numérica de funciones especiales. En efecto, en la gran mayoría de

los casos ambos problemas están íntimamente ligados, puesto que casi cualquier algoritmo de cálculo de ceros (tipo bisección, Newton, etc...) requerirá evaluaciones de la función correspondiente, o de sus derivadas. Los métodos de punto fijo que hemos presentado en este capítulo no son una excepción, de ahí que la evaluación de los cocientes de hipergeométricas necesarios sea un elemento clave del algoritmo. Estos cálculos se han llevado a cabo de manera natural por medio de las fracciones continuas asociadas, pero en algunos casos (por ejemplo, la función hipergeométrica confluyente de segunda especie $U(a; c; x)$ en el rango $x < c - a$) quizá sea interesante estudiar otros métodos de evaluación alternativos.

Apéndice A

Análisis de la función $\Omega(x)$

A.1. Propiedades de la función $\Omega(x)$ en la ecuación de Gauss

A.1.1. Caso $p + q = 1$

En este apéndice incluimos los cálculos necesarios para el teorema (2.2.1). Recordamos que en el caso $p + q = 1$ la función $\Omega(x)$ es (2.20):

$$\Omega(z(x)) = \frac{1}{4}x^{-2p}(1-x)^{2p-2}P(x), \quad (\text{A.1})$$

donde (2.21):

$$P(x) = -L^2x^2 + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1 - 2p)x + p^2 - \alpha^2. \quad (\text{A.2})$$

y $L = 2n + \alpha + \beta + 1$. Asimismo tendremos en cuenta en todo momento las condiciones de oscilación (2.2):

$$n > 0, \quad n + \alpha > 0, \quad n + \beta > 0, \quad n + \alpha + \beta > 0. \quad (\text{A.3})$$

Dividiremos el resultado general en varios lemas más simples:

Lema A.1 *La función $\Omega(z(x))$ tiene dos ceros reales independientemente de los valores de n , α , β y p .*

Escribimos el discriminante de $P(x)$ como función de p :

$$\Delta(p) = 4(1 + L^2)p^2 - 4(L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1)p + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1)^2 - 4L^2\alpha^2. \quad (\text{A.4})$$

Esto es una parábola que alcanza el mínimo en:

$$p^* = \frac{L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1}{2(L^2 + 1)}, \quad (\text{A.5})$$

y en ese punto:

$$\Delta(p^*) = \frac{[L^2 + 1 - (\alpha + \beta)^2][L^2 + 1 - (\alpha - \beta)^2]}{L^2 + 1}. \quad (\text{A.6})$$

Si escribimos $L^2 - (\alpha \pm \beta)^2 = [L + (\alpha \pm \beta)][L - (\alpha \pm \beta)]$ es sencillo ver que $\Delta(p) > 0$ y por tanto siempre hay dos ceros reales.

A continuación vamos a estudiar el número de ceros del polinomio $P(x)$ en el intervalo $(0, 1)$. Consideramos primeramente el caso trivial en el que $|\alpha| = |p|$ y $|\beta| = |p - 1|$. En este caso $\Omega(x)$ se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\Omega(z(x)) = \frac{1}{4} x^{-2p+1} (1-x)^{2p-1} L^2. \quad (\text{A.7})$$

Es evidente que en estas condiciones la función no tiene ceros en $(0, 1)$.

Lema A.2 *Si se cumplen las condiciones (2.3) entonces:*

- Si $|\alpha| = |p|$ y $|\beta| > |p - 1|$ o bien si $|\beta| = |p - 1|$ y $|\alpha| > |p|$ entonces $\Omega(x)$ tiene un cero en $(0, 1)$.
- Si $|\alpha| = |p|$ y $|\beta| < |p - 1|$ o bien si $|\beta| = |p - 1|$ y $|\alpha| < |p|$ entonces $\Omega(x)$ no tiene ceros en $(0, 1)$.

En estos casos de igualdad el resultado se deduce directamente de la simplificación correspondiente de $\Omega(x)$: si $|\alpha| = |p|$ entonces $P(x) = x[-L^2x + L^2 + (p - 1)^2 - \beta^2]$. Esta expresión se anula trivialmente en $x = 0$ y también en:

$$x_0 = \frac{L^2 + (p - 1)^2 - \beta^2}{L^2}$$

A partir de (2.3) es directo probar que $L^2 - \beta^2 > 0$. De esta forma $x_0 > 0$, y si $|\beta| > |p - 1|$ entonces $x_0 < 1$, mientras que si $|\beta| < |p - 1|$ entonces $x_0 > 1$. El caso $|\beta| = |p - 1|$ es análogo. ■

Lema A.3 *Si se verifica (2.3) entonces:*

- Si $|\alpha| > |p|$ y $|\beta| > |p - 1|$ entonces $\Omega(x)$ tiene dos ceros en $(0, 1)$.
- Si $|\alpha| > |p|$ y $|\beta| < |p - 1|$, o bien si $|\alpha| < |p|$ y $|\beta| > |p - 1|$ entonces $\Omega(x)$ tiene un cero en $(0, 1)$.
- Si $|\alpha| < |p|$ y $|\beta| < |p - 1|$ entonces $\Omega(x)$ no tiene ceros en $(0, 1)$.

Estos resultados se demuestran sin dificultad utilizando (2.3), el lema (A.1) y los signos de $P(0) = p^2 - \alpha^2$, de $P(1) = (p - 1)^2 - \beta^2$ y del término $\delta = 4L^2(p^2 - \alpha^2)$. ■

El término polinómico de la derivada no es sencillo de manejar, pero podemos utilizar el siguiente criterio parcial:

Lema A.4 Si

$$0 < p < \frac{1}{2}, \quad |\alpha| > |p|, \quad |\beta| < |p-1| \quad (\text{A.8})$$

simultáneamente, o si

$$\frac{1}{2} < p < 1, \quad |\alpha| < |p|, \quad |\beta| > |p-1| \quad (\text{A.9})$$

simultáneamente entonces $\Omega'(x)$ no tiene ceros en $(0, \infty)$.

Consideramos el primer caso, y el segundo se puede demostrar de manera similar. Los límites son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = +\infty$$

Por lo tanto tenemos dos posibilidades, o bien $\Omega(x)$ tiene dos extremos relativos en $(0, 1)$ o bien es estrictamente creciente. Es complicado llevar a cabo el análisis directamente en el intervalo $(0, 1)$ sin trabajar directamente con el discriminante de $Q(x)$, y por esa razón vamos a considerar el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{x}{1-x}. \quad (\text{A.10})$$

Este cambio lleva el intervalo $(0, 1)$ en $(0, \infty)$ y preserva las propiedades de monotonía. En la variable t los coeficientes de $Q(x(t))$ admiten una expresión más sencilla:

$$\Omega(x(t)) = \frac{t^{-2p}}{4} \left[((p-1)^2 - \beta^2)t^2 + (L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + p^2 + (p-1)^2)t + p^2 - \alpha^2 \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d\Omega(x)}{dt} = -\frac{t^{-2p-1}}{2} Q(t), \quad (\text{A.12})$$

donde

$$Q(t) = \left[(p-1)((p-1)^2 - \beta^2)t^2 + (p-1/2)(L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + p^2 + (p-1)^2)t + p(p^2 - \alpha^2) \right]. \quad (\text{A.13})$$

A partir de esta expresión no es complicado comprobar, utilizando las condiciones (2.3), que los tres coeficientes de la parte polinómica de la función $\Omega'(x(t))$ son negativos. Por tanto no puede haber ceros positivos en la variable t y consecuentemente tampoco los hay en $(0, 1)$ en la variable x . El segundo caso se puede probar de manera análoga.

Además de esta información, consideramos el comportamiento de la función $\Omega(x)$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow 1^-$:

Si $p < 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } |\alpha| \leq |p| \\ 0^- & \text{si } |\alpha| > |p| \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\beta| \leq |p-1| \\ -\infty & \text{si } |\beta| > |p-1| \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Si $p = 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } |\alpha| = |p| \\ -\alpha^2/4 & \text{si } |\alpha| > |p| \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\beta| \leq |p-1| \\ -\infty & \text{si } |\beta| > |p-1| \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Si $0 < p < 1/2$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\alpha| < |p| \\ 0^+ & \text{si } |\alpha| = |p| \\ -\infty & \text{si } |\alpha| > |p| \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\beta| \leq |p-1| \\ -\infty & \text{si } |\beta| > |p-1| \end{cases} \quad \text{y } |\alpha| \geq |p| \quad (\text{A.19})$$

Si $p = 1/2$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\alpha| < |p| \\ 1/4(L^2 + 1/4 - \beta^2) & \text{si } |\alpha| = |p| \\ -\infty & \text{si } |\alpha| > |p| \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\beta| < |p-1| \\ 1/4(L^2 + 1/4 - \alpha^2) & \text{si } |\beta| = |p-1| \\ -\infty & \text{si } |\beta| > |p-1| \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Con toda esta información se puede deducir de manera sencilla la forma de la función $\Omega(x)$ en cada uno de los casos enunciados en el teorema.

En los casos en los que la función $\Omega(x)$ tiene un máximo o un mínimo en $(0, 1)$ es importante calcular dicho extremo y el valor de $\Omega(x)$ en dicho punto, que nos dará la cota correspondiente para la distancia entre ceros consecutivos. En primer lugar señalamos que el cálculo es más sencillo en la variable $t = x/(1-x)$, que hemos introducido anteriormente.

Recordamos el polinomio $Q(t)$, dado por (A.13):

$$Q(t) = (p-1)((p-1)^2 - \beta^2)t^2 + (p-1/2)\Lambda t + p(p^2 - \alpha^2), \quad (\text{A.22})$$

donde

$$\Lambda = L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + p^2 + (p-1)^2. \quad (\text{A.23})$$

Como hemos visto anteriormente, a partir de (A.3) es sencillo probar que $\Lambda > 0$. Las raíces de $Q(t)$ son (2.30):

$$t_{\pm} = \frac{(1/2 - p)\Lambda}{2(p-1)((p-1)^2 - \beta^2)} \delta, \quad (\text{A.24})$$

donde

$$\delta = 1 \pm \operatorname{sgn}(1 - 2p) \sqrt{1 - \frac{4p(p-1)(p^2 - \alpha^2)((p-1)^2 - \beta^2)}{(p-1/2)^2 \Lambda^2}}. \quad (\text{A.25})$$

Es claro que $\Lambda = \mathcal{O}(n^2)$ cuando $n \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta (A.23). El comportamiento asintótico de las raíces t_+ y t_- es el siguiente:

$$t_+ = \frac{4(1/2 - p)}{(1-p)(\beta^2 - (p-1)^2)} n^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.26})$$

$$t_- = \frac{p(\alpha^2 - p^2)}{4(p-1/2)} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.27})$$

La raíz t_+ tiende a $\pm\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual quiere decir que la correspondiente solución x_+ tiende a 1^- o a 1^+ , respectivamente. La raíz t_- tiende a 0^{\pm} cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que x_- tiende igualmente a 0^{\pm} . Esta información se puede utilizar también para analizar los diferentes comportamientos de la función $\Omega(x)$.

Por lo tanto, si definimos:

$$\Delta_+ := \frac{\pi}{\sqrt{\Omega(t_+)}} , \quad \Delta_- := \frac{\pi}{\sqrt{\Omega(t_-)}} , \quad (\text{A.28})$$

entonces las diferencias $\Delta_k(p, 1-p)$ satisfacen:

$$\Delta_k(p, 1-p) > \begin{cases} \Delta_+, & |\alpha| > p, \quad |\beta| > 1-p, \quad p < 1/2 \\ \Delta_-, & |\alpha| > p, \quad |\beta| > 1-p, \quad p > 1/2, \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$\Delta_k(p, 1-p) < \begin{cases} \Delta_-, & |\alpha| < p, \quad |\beta| < 1-p, \quad p < 1/2 \\ \Delta_+, & |\alpha| < p, \quad |\beta| < 1-p, \quad p > 1/2. \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Cuando n es grande

$$\Omega(t_+) = \frac{1}{8} \left[\frac{1/2 - p}{\beta^2 - (p-1)^2} \right]^{1-2p} \left[\frac{4n^2}{1-p} \right]^{2-2p} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.31})$$

$$\Omega(t_-) = \frac{1}{8} \left[\frac{\alpha^2 - p^2}{p-1/2} \right]^{1-2p} \left[\frac{4n^2}{p} \right]^{2p} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.32})$$

y las cotas Δ_+ y Δ_- admiten las siguientes estimaciones:

$$\Delta_+ = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{1/2 - p}{\beta^2 - (p-1)^2} \right]^{p-1/2} \left[\frac{4n^2}{1-p} \right]^{p-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.33})$$

$$\Delta_- = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{p-1/2}{\alpha^2-p^2} \right]^{1/2-p} \left[\frac{4n^2}{p} \right]^{-p} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.34})$$

Estos resultados sirven para ilustrar lo que ocurre en las zonas no cubiertas en el teorema (2.2.1). Cuando el discriminante de $Q(t)$ es negativo no hay raíces reales, y la función $\Omega(x)$ es monótona. Sin embargo, cuando n es suficientemente grande el discriminante pasa a ser positivo, puesto que n solamente está presente en el coeficiente de grado uno. Por ejemplo, en el caso $0 < p < 1/2$, $|\alpha| < |p|$ y $|\beta| > |1-p|$ es sencillo comprobar que $t_+ \rightarrow +\infty$ y $t_- \rightarrow 0^+$ cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que $x_+ \rightarrow 1^-$ y $x_- \rightarrow 0^+$. En otras palabras, para n suficientemente grande la función $\Omega(x)$ tiene dos extremos locales de $(0, 1)$ donde la función es positiva, y por lo tanto no es posible establecer propiedades globales de tipo Sturm.

A.1.2. Caso $q = 0$

En este apéndice incluimos los cálculos necesarios para el teorema (2.2.7), con el cambio de variable $q = 0$, de manera similar a como se hizo en el caso $p + q = 1$. En este caso recordamos que: (2.55):

$$\Omega(x) = \frac{1}{4}x^{-2p} (Ex^2 + Fx + G), \quad (\text{A.35})$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} E &= (p-1)^2 - L^2, \\ F &= L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - p^2 - (p-1)^2, \\ G &= p^2 - \alpha^2. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

En todo momento tendremos presente las condiciones de oscilación (2.3):

$$n > 0, \quad n + \alpha > 0, \quad n + \beta > 0, \quad n + \alpha + \beta > 0. \quad (\text{A.37})$$

Lema A.5 *Si se cumplen las condiciones de oscilación anteriores, entonces:*

$$L^2 - \beta^2 - (\alpha+1)^2 > 0, \quad L^2 - \beta^2 - (\alpha-1)^2 > 0. \quad (\text{A.38})$$

Para probar el primer resultado basta comprobar lo siguiente:

$$L^2 - (\beta + \alpha + 1)^2 = (L + \beta + \alpha + 1)(L - \beta - \alpha - 1) = 4n(n + \alpha + \beta + 1) > 0.$$

$$L^2 - (-\beta + \alpha + 1)^2 = (L - \beta + \alpha + 1)(L + \beta - \alpha - 1) = 4(n + \alpha + 1)(n + \beta) > 0.$$

Sumando ambas expresiones se demuestra la primera desigualdad del lema, puesto que $L^2 - (\beta + \alpha + 1)^2 + L^2 - (-\beta + \alpha + 1)^2 = 2(L^2 - \beta^2 - (\alpha-1)^2) > 0$. La segunda desigualdad se puede demostrar con un argumento análogo, cambiando α por $-\alpha$. ■

Lema A.6 *Si se cumplen las condiciones (2.3) entonces $\Omega(x)$ tiene dos ceros reales, independientemente de los valores de n , α , β y p .*

Para demostrar esto escribimos el discriminante de la parte polinómica de $\Omega(x)$ como función de p :

$$\Delta_0 = 4(1 + \beta^2)p^2 + 4(L^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 1)p + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1)^2 - 4\alpha^2(L^2 - 1), \quad (\text{A.39})$$

que alcanza su mínimo en el punto:

$$q_m = -\frac{L^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 1}{2(1 + \beta^2)}. \quad (\text{A.40})$$

En este punto la función toma el valor:

$$\Delta_0(q_m) = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} [(L + \alpha)^2 - \beta^2 - 1][(L - \alpha)^2 - \beta^2 - 1]. \quad (\text{A.41})$$

Para comprobar que este valor es positivo escribimos:

$$(L + \alpha)^2 - \beta^2 - 1 = (L + \alpha + \beta)(L + \alpha - \beta) - 1 = (2(n + \alpha + \beta) + 1)(2(n + \alpha) + 1) - 1 > 0.$$

Análogamente:

$$(L - \alpha)^2 - \beta^2 - 1 = (L - \alpha + \beta)(L - \alpha - \beta) - 1 = (2(n + \beta) + 1)(2n + 1) - 1 > 0.$$

■

Lema A.7 *Si $|\alpha| > |p|$ entonces la función $\Omega(x)$ tiene dos ceros en $(0, 1)$.*

Aplicando el lema A.6 sabemos que $\Omega(x)$ tiene dos ceros reales.

Para probar que $\Omega(x)$ tiene dos ceros en $(0, 1)$ consideramos el mismo cambio de variable que utilizamos para el caso $p + q = 1$, es decir, $x = t/(1 + t)$. En la nueva variable:

$$\Omega(x(t)) = \frac{1}{4}t^{2p}(1 + t)^{2p-2} (-\beta^2 t^2 + (L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2p - 1)t + p^2 - \alpha^2). \quad (\text{A.42})$$

Es claro que el término cuadrático y el término independiente son ambos negativos. En cuanto al término de grado uno, supongamos primero que $\alpha > 0$, entonces:

$$L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2p - 1 > L^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha - 1 = L^2 - \beta^2 - (\alpha + 1)^2.$$

Esta expresión es positiva utilizando el Lema (A.5). Análogamente, si $\alpha < 0$ entonces:

$$L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2p - 1 > L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha - 1 = L^2 - \beta^2 - (\alpha - 1)^2.$$

Nuevamente esto es positivo por el Lema (A.5). Por lo tanto, las dos raíces de la parte polinómica de (A.42) tienen que ser positivas, lo cual se corresponde con dos raíces en $(0, 1)$ en la variable x .

■

Lema A.8 *Supongamos que $p \geq 1/2$ y $|\alpha| < |p|$, entonces $\Omega'(x)$ no tiene ceros en $(0, 1)$.*

Primeramente consideramos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = -\beta^2/4.$$

Por lo tanto solamente tenemos dos posibilidades: o bien la función $\Omega(x)$ es creciente o bien tiene dos extremos relativos. Para decidir examinamos la derivada:

$$\Omega'(x) = \frac{1}{2}x^{-2p-1}Q(x), \quad (\text{A.43})$$

donde

$$Q(x) = \tilde{E}x^2 + \tilde{F}x + \tilde{G},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (p-1)((p-1)^2 - L^2) = (p-1)E, \\ \tilde{F} &= (p-1/2)(L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - p^2 - (p-1)^2) = (p-1/2)F, \\ \tilde{G} &= p(p^2 - \alpha^2) = pG, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

y los coeficientes vienen dados por (2.56). Un cálculo tedioso pero sencillo con los signos de estos coeficientes, teniendo en cuenta las condiciones (2.3) y que $|\beta| < |q|$ permite obtener los siguientes resultados:

- Si $p = 1/2$ entonces $\tilde{E} > 0$, $\tilde{F} = 0$ y $\tilde{G} > 0$, de modo que no hay raíces reales.
- Si $1/2 < p < 1$ entonces $\tilde{E} > 0$, $\tilde{F} > 0$ y $\tilde{G} > 0$, de modo que no puede haber dos raíces en $(0, 1)$.
- Si $p = 1$ entonces $\tilde{E} = 0$, $\tilde{F} > 0$ y $\tilde{G} > 0$, de modo que solamente puede haber una raíz real negativa.
- Si $1 < p < L + 1$ entonces $\tilde{E} < 0$ y $\tilde{G} > 0$, de manera que no puede haber dos raíces en $(0, 1)$.
- Si $p = L + 1$ entonces $\tilde{E} = 0$, de manera que no puede haber dos raíces en $(0, 1)$.
- Si $p > L + 1$ entonces $\tilde{E} > 0$, $\tilde{F} < 0$ y $\tilde{G} > 0$, pero es sencillo comprobar que $\tilde{G} > \tilde{E}$, de modo que no puede haber dos raíces en $(0, 1)$.

La prueba de los distintos casos del teorema se obtiene a partir de los lemas previos y de los límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Omega(x) = \frac{-\beta^2}{4} \quad (\text{A.45})$$

independientemente del valor de p .

- Si $|p| < |\alpha|$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^- & \text{si } p < 0 \\ -\beta^2/4 & \text{si } p = 0 \\ -\infty & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

- Si $|p| = |\alpha|$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } p < 1/2 \\ \frac{1}{4}(L^2 - \beta^2 - 1/4) & \text{si } p = 1/2 \\ +\infty & \text{si } p > 1/2 \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

- Si $|p| > |\alpha|$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } p < 0 \\ +\infty & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

Con estos datos y los dos lemas (A.6) y (A.7) se puede deducir la forma de la función $\Omega(x)$ en los casos expuestos en el teorema.

A continuación, y siguiendo el esquema que utilizamos en el caso $p + q = 1$, vamos a analizar con un poco más de detalle los casos en los que la función $\Omega(x)$ presenta un extremo en el intervalo $(0, 1)$. En primer lugar veremos el caso $|\alpha| > |p|$, que es el más sencillo, y después comentaremos lo que sucede cuando $|\alpha| < |p|$ y $p < 0$. Recordamos que:

$$\Omega(x) = \frac{1}{4}x^{-2p}(Ex^2 + Fx + G), \quad (\text{A.49})$$

$$\Omega'(x) = \frac{1}{2}x^{-2p-1}((p-1)Ex^2 + (p-1/2)Fx + pG), \quad (\text{A.50})$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} E &= (p-1)^2 - L^2, \\ F &= L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - p^2 - (p-1)^2, \\ G &= p^2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

Cuando $|\alpha| > |p|$ entonces los signos de los coeficientes son claros, utilizando los lemas anteriores: $E < 0$, $F > 0$, $G < 0$. Veamos cuál es la raíz de la derivada $\Omega'(x)$ en el intervalo $(0, 1)$ para la cual el valor de $\Omega(x)$ es positivo.

Las raíces de la derivada se pueden escribir de la siguiente manera:

$$x_{\pm} = \frac{-(p-1/2)F \pm \sqrt{(p-1/2)^2 F^2 - 4p(p-1)EG}}{2(p-1)E}. \quad (\text{A.51})$$

Vamos a probar que la raíz x_+ es la que corresponde a un máximo en el intervalo $(0, 1)$, donde la función $\Omega(x)$ es positiva. Para ello utilizaremos que $\Omega(x)$ siempre tiene dos ceros en dicho intervalo cuando $|\alpha| > |p|$, así como los valores en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

- Cuando $p < 0$ hay dos extremos en $(0, 1)$, x_- corresponde a un mínimo donde $\Omega(x) < 0$, y x_+ a un máximo en el que $\Omega(x) > 0$.
- Cuando $p = 0$ entonces $x_- = 0$ y:

$$x_+ = \frac{L^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 1}{2(L^2 - 1)},$$

que está en $(0, 1)$.

- Si $0 < p < 1/2$, entonces $x_- < 0$ y x_+ está en $(0, 1)$.
- Si $p = 1/2$, entonces las raíces son:

$$x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1/4}{L^2 - 1/4}},$$

y la raíz que nos interesa sigue siendo x_+ .

- Si $1/2 < p < 1$, entonces $x_- < 0$ y $x_+ > 0$.
- Si $p = 1$, entonces la única solución es:

$$x = \frac{2(\alpha^2 - 1)}{L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1}.$$

- Si $p > 1$, entonces las dos raíces son positivas, y $x_- > x_+$. Teniendo en cuenta los valores en los extremos, el valor que corresponde a un máximo donde la función es positiva es nuevamente x_+ .

Como consecuencia del teorema de Sturm, cuando la función $\Omega(x)$ tiene un máximo x_+ en $(0, 1)$ y $\Omega(x_+) > 0$, entonces se cumple que $\Delta z_k(p, 0) > \Delta_+$, donde $\Delta_+ = \pi/\sqrt{\Omega(x_+)}$. Como se cumple que $F > 0$, podemos escribir la solución x_+ de la siguiente manera:

$$x_+ = \frac{-(p - 1/2)F}{2(p - 1)E} \left(1 + \operatorname{sgn}(1/2 - p) \sqrt{1 - \frac{4p(p - 1)EG}{(p - 1/2)^2 F^2}} \right), \quad (\text{A.52})$$

Podemos obtener más información de tipo asintótico cuando $n \rightarrow \infty$:

- Si $p < 1/2$ entonces:

$$x_+ = \frac{1/2 - p}{1 - p} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.53})$$

Por tanto:

$$\Omega(x_+) = \frac{1}{2(1 - p)} \left[\frac{1/2 - p}{1 - p} \right]^{1-2p} n^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.54})$$

y consecuentemente:

$$\Delta_+ = \pi \sqrt{2(1-p)} \left[\frac{1/2-p}{1-p} \right]^{p-1/2} \frac{1}{n} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.55})$$

■ Si $p > 1/2$ entonces:

$$x_+ = \frac{1}{4} \frac{p(\alpha^2 - p^2)}{p - 1/2} \frac{1}{n^2} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.56})$$

Por tanto:

$$\Omega(x_+) = 2^{4p-3} p^{-2p} \left[\frac{\alpha^2 - p^2}{q - 1/2} \right]^{1-2p} n^{4p} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.57})$$

y consecuentemente:

$$\Delta_+ = \pi 2^{-2p+1} \sqrt{2p} \left[\frac{p(\alpha^2 - p^2)}{p - 1/2} \right]^{p-1/2} n^{-2p} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.58})$$

El segundo caso en el que hay extremos en $(0, 1)$ donde la función $\Omega(x)$ es positiva es $|\alpha| < |p|$ y $p < 0$. En esta ocasión los signos de los coeficientes E y F pueden cambiar, puesto que si $|p|$ es pequeño entonces $E < 0$ y $F > 0$, mientras que si $|p|$ es grande entonces $E > 0$ y $F < 0$. El coeficiente E cambia de signo en $p_E = 1 - L < 0$, mientras que F cambia de signo en p_F , y $p_E < p_F < 0$. Esto se ve con facilidad puesto que $F = -E - G - \beta^2$.

	p_E		p_F		0
Signo de E	+	—	—	—	—
Signo de F	—	—	+	+	+

La raíz correspondiente al máximo donde la función es positiva es la misma que en el caso anterior, es decir:

$$x_+ = \frac{-(p - 1/2)F}{2(p - 1)E} \left(1 + \operatorname{sgn}[(1/2 - p)F] \sqrt{1 - \frac{4p(p - 1)EG}{(p - 1/2)^2 F^2}} \right). \quad (\text{A.59})$$

El análisis es sencillo dividiendo los valores de p en los intervalos $(-\infty, p_E)$, (p_E, p_F) y $(p_F, 0)$, junto con los valores límite cuando $x = 0$ y $x = 1$.

A.1.3. Casos $|p| = |\alpha|$, $|q| = |\beta|$

En términos de la variable $t = x/(1 - x)$ la función $\Omega(x(t))$ y su derivada tienen la siguiente estructura, como hemos visto antes:

$$\Omega(t) = \frac{1}{4} t^{-2p+1} (1 + t)^{2p+2q-2} [(q^2 - \beta^2)t + D], \quad (\text{A.60})$$

$$\Omega'(t) = \frac{1}{4}t^{-2p}(1+t)^{2p+2q-3} [q(q^2 - \beta^2)t^2 + \theta t + (1/2 - p)D], \quad (\text{A.61})$$

donde

$$D = L^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 1 + 2(p + q - pq), \quad (\text{A.62})$$

$$\theta = (1 - p)(q^2 - \beta^2) + (q - 1/2)D. \quad (\text{A.63})$$

El comportamiento en $t = 0^+$ y en $t = +\infty$ es el siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Omega(x(t)) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } p < 1/2 \\ D/4 & \text{si } p = 1/2 \\ +\infty & \text{si } p > 1/2 \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

■ Si $p < 1$:

- Si $p + q < 1$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(x(t)) = \begin{cases} 0^- & \text{si } q < 0 \\ -\beta^2/4 & \text{si } q = 0 \\ -\infty & \text{si } q > 0 \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

- Si $p + q \geq 1$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(x(t)) = -\infty$.

■ Si $p = 1$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(x(t)) = \begin{cases} 0^- & \text{si } q < 0 \\ -\beta^2/4 & \text{si } q = 0 \\ -\infty & \text{si } q > 0 \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

■ Si $p > 1$ entonces:

- Si $p + q < 1$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(x(t)) = 0^-$.
- Si $p + q = 1$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(x(t)) = (q^2 - \beta^2)/4 < 0$.
- Si $p + q > 1$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(x(t)) = \begin{cases} 0^- & \text{si } q < 0 \\ -\beta^2/4 & \text{si } q = 0 \\ -\infty & \text{si } q > 0 \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

Esto permite probar los diferentes casos expuestos en (2.2.16).

A.2. Propiedades de la función $\Omega(x)$ en la ecuación de Kummer

De manera similar a como tratamos el caso de las funciones de Gauss vamos a estudiar el comportamiento de la función (2.89):

$$\Omega(z(x)) = -\frac{1}{4}x^{-2m}(x^2 - 2Lx + \alpha^2 - m^2) \quad (\text{A.68})$$

La derivada es (2.90):

$$\Omega'(z(x)) = -\frac{1}{2}x^{-2m-1} \left[(1-m)x^2 + (2m-1)Lx - m(\alpha^2 - m^2) \right]. \quad (\text{A.69})$$

Para ello enunciamos algunos resultados previos:

Lema A.2.1 *En las condiciones de oscilación (2.85), si $|\alpha| = |m|$ entonces la función $\Omega(z(x))$ tiene un cero real $x_0 > 0$. Además:*

- Si $m < 1/2$ o si $m > 1$ entonces la derivada $\Omega'(z(x))$ tiene un cero real $x_e > 0$.
- Si $m \in [1/2, 1]$ entonces la derivada es negativa para $x > 0$.

Estos resultados se obtiene directamente a partir de la simplificación de $\Omega(z(x))$ y de $\Omega'(z(x))$ cuando $|m| = |\alpha|$.

Lema A.2.2 *En las condiciones de oscilación (2.85), si $|\alpha| \neq |m|$ la función $\Omega(z(x))$ tiene dos ceros reales para cualesquiera valores de n , α y m . Además, si se cumple que $|\alpha| > |m|$ entonces dichos ceros son positivos.*

Este resultado se sigue directamente del hecho de que:

$$\Omega(z(x)) = -\frac{1}{4}x^{-2m}P(x), \quad (\text{A.70})$$

donde $P(x)$ se anula en los puntos:

$$x_{\pm} = L \pm \sqrt{L^2 - \alpha^2 + m^2}. \quad (\text{A.71})$$

Es claro a partir de (2.85) que $L^2 - \alpha^2 > 0$, luego el discriminante es positivo. Es evidente también que $x_+ > 0$, y si $|\alpha| > |m|$ entonces $x_- > 0$. ■

Un cuanto a la derivada, operando con la expresión (2.90) y teniendo en cuenta los diferentes casos es sencillo ver que la raíz que corresponde a un extremo donde la función $\Omega(x)$ es positiva es:

$$x_e = \frac{m-1/2}{m-1}L - \frac{\sqrt{\Delta}}{m-1}, \quad (\text{A.72})$$

si $m \neq 1$, donde Δ viene dado por (2.92):

$$\Delta = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 L^2 + m(1-m)(\alpha^2 - m^2) \quad (\text{A.73})$$

Si $m = 1$ entonces el valor de x_e viene dado por la simplificación correspondiente:

$$x_e = \frac{\alpha^2 - 1}{L}. \quad (\text{A.74})$$

Si $m = 1/2$ entonces:

$$x_e = \sqrt{\alpha^2 - 1/4}. \quad (\text{A.75})$$

Lema A.2.3 *En las condiciones de oscilación (2.85), si $|\alpha| \neq |m|$ la función $\Omega'(z(x))$ tiene dos ceros reales salvo quizás si $m \in (0, 1)$ y $|\alpha| < |m|$.*

Esto se deduce de la inspección del discriminante de la parte polinómica de la derivada, $Q(x) = (1-m)x^2 + (2m-1)Lx - m(\alpha^2 - m^2)$, que viene dado por (2.92). Por un lado, si $m \in (0, 1)$ y $|\alpha| > |m|$ es claro que $\Delta > 0$. Por otro lado, si reescribimos:

$$\Delta = m(m-1)(L^2 - \alpha^2 + m^2) + L^2/4 \quad (\text{A.76})$$

es claro que $\Delta > 0$ si $m \leq 0$ o si $m \geq 1$, independientemente del valor de α . ■

Lema A.9 *En las condiciones de oscilación (2.85), si $|\alpha| < |m|$ y $m \in [1/2, 1]$ la derivada $\Omega'(z(x))$ no tiene ceros positivos.*

Esta propiedad se sigue de los signos de los coeficientes de $Q(x)$. ■

Además de estos resultados hay que tener en cuenta los valores límite en $x = 0$ y en $+\infty$:

Si $|\alpha| < |m|$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } m < 0 \\ +\infty & \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

Si $|\alpha| = |m|$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } m < 1/2 \\ L/2 & \text{si } m = 1/2 \\ +\infty & \text{si } m > 1/2 \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

Si $|\alpha| > |m|$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = \begin{cases} 0^- & \text{si } m \leq 0 \\ -\alpha^2/4 & \text{si } m = 0 \\ -\infty & \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

Y en todos los casos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Omega(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } m < 1 \\ -1/4 & \text{si } m = 1 \\ 0^- & \text{si } m > 1 \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

Esta información permite probar los diferentes casos expuestos en el Teorema (2.3.1). A continuación, siguiendo el esquema que propusimos en el caso Gauss, vamos a dar alguna información acerca de los ceros de la derivada $\Omega'(x)$ cuando $\Omega(x)$ tiene un máximo en $x > 0$, es decir:

- cuando $|\alpha| > |m|$, o bien
- cuando $|\alpha| = |m|$ y $m \leq 1/2$, o bien

- cuando $|\alpha| > |m|$ y $m < 0$.

En estos casos, la cota para la distancia entre ceros consecutivos viene dada por:

$$\Delta_e = \frac{\pi}{\sqrt{\Omega(x_e)}}. \quad (\text{A.81})$$

Los casos $m = 1$, $m = 1/2$, donde la expresión de x_e se simplifica (2.93), aparecen explícitamente en el capítulo 2 de esta memoria y también en [11]. En los restantes casos, podemos escribir:

$$x_e = \frac{m - 1/2}{m - 1} L \left(1 - \text{sgn}(m - 1/2) \sqrt{1 + \frac{m(1 - m)(\alpha^2 - m^2)}{(m - 1/2)^2 L^2}} \right) \quad (\text{A.82})$$

podemos dar información cuando $n \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta que $L = 2n + \alpha + 1$:

- Si $m < 1/2$ entonces:

$$x_e = 4 \frac{1/2 - m}{1 - m} n \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{A.83})$$

En este caso:

$$\Omega(x_e) = \frac{2^{1-4m}}{1 - m} \left[\frac{1/2 - m}{1 - m} \right]^{1-2m} n^{2-2m} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad (\text{A.84})$$

y por lo tanto

$$\Delta_e = 2^{2m-1/2} \sqrt{1 - m} \left[\frac{1/2 - m}{1 - m} \right]^{m-1/2} n^{m-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad (\text{A.85})$$

- Si $m > 1/2$ (y $m \neq 1$) entonces:

$$x_e = \frac{m(\alpha^2 - m^2)}{4(m - 1/2)n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.86})$$

En este caso:

$$\Omega(x_e) = 2^{4m-3} m^{-2m} \left[\frac{\alpha^2 - m^2}{m - 1/2} \right]^{1-2m} n^{2m} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad (\text{A.87})$$

y por lo tanto

$$\Delta_e = 2^{3/2-2m} m^m \left[\frac{\alpha^2 - m^2}{m - 1/2} \right]^{m-1/2} n^{-m} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad (\text{A.88})$$

En el caso $|\alpha| < |m|$, $m \in (0, 1/2)$, no incluido en el teorema, podemos realizar un análisis similar al de los casos no globales de la ecuación de Gauss. En efecto, la función $\Omega'(x)$ puede tener dos ceros positivos o ninguno, dependiendo del signo de Δ . Cuando n es pequeño este discriminante es negativo y la derivada tiene signo constante (negativo), mientras que cuando n es suficientemente grande $\Delta > 0$ la función $\Omega'(x)$ tiene dos ceros positivos donde la función es positiva, y no hay propiedades globales de tipo Sturm. Esto puede verse directamente a partir de los coeficientes de $\Omega'(x)$ o bien teniendo en cuenta que el término de orden n^{-2} en (A.83) es negativo en este caso.

Apéndice B

Descripción del paquete Maple zerosSF

En este apéndice se explica de manera resumida el contenido y funcionamiento del paquete de rutinas Maple **zerosSF.mpl**. Este conjunto de programas implementa el método de punto fijo para calcular ceros reales de funciones hipergeométricas que se ha explicado anteriormente. Se incluyen algunos ejemplos y comparaciones con las rutinas predefinidas de Maple, en términos de precisión en el cálculo y tiempo de CPU.

B.1. Funciones del paquete zerosSF

Las familias de funciones incluidas en el programa son:

1. Funciones de Bessel $C_\nu(x) = \cos(\alpha)J_\nu(x) + \sin(\alpha)Y_\nu(x)$.

El procedimiento correspondiente es **zerosBessel(nu,c,x1,x2)**, donde c es el orden de las funciones de Bessel, $c = \cos(\alpha)$ es el coeficiente de la combinación, $-1 \leq c \leq 1$, y $0 < x1 \leq x2$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

2. Funciones regulares de Coulomb $F_n(\gamma, x)$.

El procedimiento correspondiente es **zerosCoulomb(n,g,x1,x2)**, donde n y g son los parámetros de la función de Coulomb y $0 < x1 \leq x2$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

3. Funciones hipergeométricas confluentes $M(a; c; x)$, $U(a; c; x)$.

Los procedimientos correspondientes son **zerosMconflu(a,c,x1,x2)** y **zerosUconflu(a,c,x1,x2)**, donde a y c son los parámetros (reales) de las funciones hipergeométricas confluentes y $0 < x1 \leq x2$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

4. Polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$.

El procedimiento correspondiente es **zerosLaguerre(n,a,x1,x2)**, donde n es el grado del polinomio, $\alpha > -1$ es un parámetro real y $0 < x1 \leq x2$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

5. Polinomios de Hermite $H_n(x)$.

El procedimiento correspondiente es **zerosHermite(n,x1,x2)**, donde n es el grado del polinomio y $x1 \leq x2$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

6. Funciones hipergeométricas de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$.

El procedimiento correspondiente es **zerosHyperGauss(a,b,c,x1,x2)**, donde a, b y c son los parámetros (reales) de la función hipergeométrica de Gauss y $0 < x1 \leq x2 < 1$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

7. Polinomios de Legendre y Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Los procedimientos correspondientes son **zerosLegendre(n,x1,x2)** y **zerosJacobi(n,a,b,x1,x2)**, donde n es el grado del polinomio, $a, b > -1$ son los parámetros de los polinomios de Jacobi ($a = b = 0$ en el caso de los polinomios de Legendre) y $-1 < x1 \leq x2 < 1$ es el intervalo donde el programa buscará los ceros.

B.2. Ejemplos

En esta sección vamos a ilustrar el funcionamiento de las diferentes rutinas por medio de ejemplos y comparación con Maple. Salvo que se indique lo contrario, los cálculos se realizan con 30 dígitos de precisión.

B.2.1. Funciones de Bessel

Consideramos la combinación de funciones de Bessel

$$\mathcal{C}_\nu(x) = \cos(\alpha)J_\nu(x) + \sin(\alpha)Y_\nu(x),$$

con los valores $\alpha = 0.7$, $c = 0.999$, $x1 = 0.01$, $x2 = 100$:

```
> zbess:=zerosBessel(0.7,0.999,0.01,100);
```

```
[3.37674058356754834412063202894, 6.53445004720833176900143923395,
9.68187956358258729031726594297, 12.8264759979234393502081676573,
15.9698973011495210593369879715, 19.1127197469134528143278383279,
22.2551959506722090460945434645, 25.3974540249071337205608861807,
28.5395658409505736607418633758, 31.6815748299598095306357501712,
34.8235087805544301104086088504, 37.9653862979942194317839612907,
41.1072203075220373906915115580, 44.2490200678755763419272411538,
47.3907923851022911768626283307, 50.5325423741729484513300180460,
```

```
53.6742739534248442219576815909, 56.8159901751263438633369314327,
59.9576934522084545923064737614, 63.0993857173179205364864874379,
66.2410685366418059132025593479, 69.3827431928283375979824877056,
72.5244107463684802449782259990, 75.6660720816944631025515580122,
78.8077279422575763458410458410, 81.9493789575411323701434502898,
85.0910256640919000309340559463, 88.2326685220601956441868557775,
91.3743079283291265682123337283, 94.5159442270262928964176542234,
97.6575777180071734400071901017]
```

B.2.2. Polinomios de Laguerre y Hermite

El siguiente ejemplo ilustra las dificultades de Maple en el caso polinómico: consideramos la función $L_{80}^{-0,5}(x)$ en el intervalo $x_1 = 10^{-8}$, $x_2 = 300$. La rutina

```
> zLag:=zerosLaguerre(80,-0.5,10^(-8),300);
```

calcula los 80 ceros en dicho intervalo. Sin embargo, si utilizamos la rutina interna de Maple correspondiente con 30 dígitos:

```
> with(orthopoly); Digits:=30; zLag2:=fsolve(L(80,0.5));
```

encontramos que varios ceros intermedios no se calculan, y es necesario aumentar la precisión de trabajo para obtenerlos. Además, si tomamos el cero mayor calculado con el método de punto fijo y con Maple y evaluamos la función para estimar el error relativo, el método de punto fijo da:

```
> Digits:=50; x0:=295.992523725071570700393625269; f:=L(80,-0.5,x):
> Err:=abs(subs(x=x0,f))/(subs(x=x0,diff(f,x))*x0);
```

Este error relativo es aproximadamente $3,49442 \times 10^{-29}$. Sin embargo, con el cero que calcula Maple este error es aproximadamente $9,473848 \times 10^{-10}$, lo cual ilustra la pérdida de cifras significativas respecto a la precisión original (30 dígitos).

En el caso de los polinomios de Hermite, realizamos la siguiente comparación de tiempos para la función $H_{100}(x)$ en el intervalo $[-100, 100]$:

```
> st1:=time(): zerosHermite(100,-100,100); st2:=time(): cpu1:=st2-st1:
> st1:=time(): fsolve(H(100,x)); st2:=time(): cpu2:=st2-st1:
> dif:=cpu2/cpu1;
```

```
12.9394654088050314465408805031
```

En este caso el método de punto fijo es considerablemente más rápido que el cálculo con Maple.

B.2.3. Polinomios de Jacobi

Esta familia es problemática cuando los parámetros α y β están cercanos a -1 , puesto que en ese caso los ceros tienden a acumularse cerca de los extremos del intervalo de ortogonalidad $[-1, 1]$, y ello dificulta el cálculo numérico. Por ejemplo, tomamos $P_{40}^{(-0.999, -0.999)}(x)$:

```
> zerosJacobi(40, -0.999, -0.999, -0.999999999999, 0.999999999999);

[-0.999998717373575482239480365232, -0.995293583439778201185290928853,
-0.984259364708234875086860158907, -0.967000950662199698651301716331,
-0.943628796626345724044550830610, -0.914290900192195091199085254592,
-0.879172803984716354794654728864, -0.838496550177118472382204086682,
-0.792519305400653192684352146538, -0.741531743509407053372348687687,
-0.685856211038030462290643036806, -0.625844690609473659801254992975,
-0.561876576289404376291818139161, -0.494356275349772416074794984128,
-0.423710651761588889422491706729, -0.350386327648128845277381041671,
-0.274846859791109526209961529981, -0.197569809056119594340487175642,
-0.119043721272917090202993451544, -0.0397650386622219804706414265706,
0.0397650386622219804706414265706, 0.119043721272917090202993451544,
0.197569809056119594340487175642, 0.274846859791109526209961529981,
0.350386327648128845277381041671, 0.423710651761588889422491706729,
0.494356275349772416074794984128, 0.561876576289404376291818139161,
0.625844690609473659801254992975, 0.685856211038030462290643036806,
0.741531743509407053372348687687, 0.792519305400653192684352146538,
0.838496550177118472382204086682, 0.879172803984716354794654728864,
0.914290900192195091199085254592, 0.943628796626345724044550830610,
0.967000950662199698651301716331, 0.984259364708234875086860158907,
0.995293583439778201185290928853, 0.999998717373575482239480365232]
```

Sin embargo, utilizando

```
> Digits:=30; fsolve(P(40, -0.999, -0.999, x));
```

el primer cero calculado por Maple es $-1.00032425154769586419150392524$, lo cual es obviamente incorrecto, puesto que siguiendo la teoría general de polinomios ortogonales [9, 80] los ceros deben estar dentro del intervalo $[-1, 1]$.

Bibliografía

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions, with formulas, tables and mathematical tables*. Dover, 1972.
- [2] S. AHMED, A. LAFORGIA, M. E. MULDOON. *On the spacing of the zeros of some classical orthogonal polynomials*. J. London Math. Soc. (2), 25 (1982), 246-252.
- [3] R. ÁLVAREZ-NODARSE. *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano", n. 26. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2003.
- [4] L. C. ANDREWS. *Special functions of Mathematics for engineers*. Oxford University Press, 1998.
- [5] G. E. ANDREWS, R. ASKEY, R. ROY. *Special functions*. Cambridge University Press, 1999.
- [6] J. S. BALL. *Automatic computation of zeros of Bessel functions and other special functions*. SIAM J. Sci. Comput. 21, 4 (2000), 1458-1464.
- [7] C. BONAN-HAMADA, W. B. JONES. *Stieltjes continued fractions and special functions: a survey*. Commun. Anal. Theory. Contin. Fract. 12 (2004), 5-68.
- [8] J. P. BOYD. *Computing zeros on a real interval through Chebyshev expansion and polynomial rootfinding*. SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002), 1666-1682.
- [9] T. S. CHIHARA. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach, 1978.
- [10] A. CUYT, V. PETERSEN, B. VERDONK, H. WAADELAND, W. B. JONES, C. BONAN-HAMADA. *Handbook of continued fractions for special functions*. Kluwer Academic Publishers (en preparación).
- [11] A. DEAÑO, A. GIL, J. SEGURA. *New inequalities from classical Sturm theorems*. J. Approx. Theory 131 (2004), 208-230.
- [12] A. DEAÑO, J. SEGURA. *LG transformations and global inequalities for the real zeros of Gauss hypergeometric functions*. J. Approx. Theory (enviado).

- [13] A. DEAÑO, J. SEGURA. *Transitory minimal solutions of hypergeometric recursions and pseudoconvergence of associated continued fractions*. Aceptado para publicación en Math. Comp.
- [14] A. DEAÑO, A. GIL, J. SEGURA. *Computation of real zeros of the Kummer function $M(a; c; x)$* . N. Takayama, A. Iglesias, J. Gutiérrez (eds), *Proceedings of IMCS 2006*. Lecture Notes in Computer Science 4151, 296-307.
- [15] A. DEAÑO, A. GIL, J. SEGURA. *A Maple package for the computation of real zeros of hypergeometric functions*. (En preparación).
- [16] D. K. DIMITROV, R. O. RODRIGUES. *On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials*. J. Approx. Theory 116 (2002), 224-239.
- [17] D. K. DIMITROV. *Convexity of the extreme zeros of Gegenbauer and Laguerre polynomials*. J. Comp. Appl. Math. 153 (2003), 171-180.
- [18] K. DRIVER, M. MÖLLER. *Zeros of the hypergeometric polynomials ${}_2F_1(-n, b; -2n; z)$* . J. Approx. Theory 110 (2001), 74-87.
- [19] K. DRIVER, M. MÖLLER. *Quadratic and cubic transformations and zeros of hypergeometric polynomials*. J. Comp. Appl. Math. 142 (2002), 411-417.
- [20] S.N. ELAYDI. *An introduction to difference equations*. Springer Verlag, 1996.
- [21] K. DRIVER, K. JORDAAN. *Separation theorems for the zeros of certain hypergeometric polynomials*. J. Comp. Appl. Math. (in press).
- [22] Á. ELBERT. *Some recent results on the zeros of Bessel functions and orthogonal polynomials*. J. Comp. Appl. Math. 133 (2001), 65-83.
- [23] Á. ELBERT, A. LAFORGIA. *Some monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials*. Acta. Math. Hungar. 48, 1-2 (1986), 155-159.
- [24] Á. ELBERT, M. MULDOON. *Inequalities and monotonicity properties of the zeros of Hermite functions*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 129, 1 (1999), 57-75.
- [25] A. ERDÉLYI ET AL. (EDS) *Higher transcendental functions, 3 vols. (Bateman Manuscript Project)*. McGraw-Hill.
- [26] R. C. FORREY. *Computing the hypergeometric function*. J. Comp. Phys. (1997), 79-100.
- [27] E. FRANK. *A new class of continued fraction expansions for the ratios of hypergeometric functions*. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 81, n. 2, (1956) 453-476.
- [28] L. GATTESCHI. *New inequalities for the zeros of Jacobi polynomials*. SIAM J. Math. Anal. 18-6 (1987), 1549-1562.

-
- [29] L. GATTESCHI. *Asymptotics and bounds for the zeros of Laguerre polynomials: a survey*. J. Comp. Appl. Math. 144 (2002), 7-27.
 - [30] C. F. GAUSS. *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*. Comment. Götting, 2 (1812). Reimpreso en *Werke*, 3 (1876), 123-162.
 - [31] W. GAUTSCHI. *Computational aspects of three-term recurrence relations*. SIAM Review 9, no.1 (1967) 24-82.
 - [32] W. GAUTSCHI. *Anomalous convergence of a continued fraction for ratios of Kummer functions*. Math. Comput. 31, no. 140 (1977) 994-999.
 - [33] W. GAUTSCHI. *Gauss quadrature approximations to hypergeometric and confluent hypergeometric functions*. J. Comp. Appl. Math. 139, 1 (2002) 173-187.
 - [34] A. GIL, W. KOEPF, J. SEGURA. *Numerical algorithms for the real zeros of hypergeometric functions*. Numer. Algorithms 36 (2004), 113-134.
 - [35] A. GIL, J. SEGURA, N.M. TEMME. *The ABC of Hyper Recursions*. J. Comp. Appl. Math. 190, 1-2 (2006), 270-286.
 - [36] A. GIL, J. SEGURA, N.M. TEMME. *Numerically satisfactory solutions of hypergeometric recursions*. Aceptado para publicación en Math. Comput.
 - [37] A. GIL, J. SEGURA, N.M. TEMME. *Computing the Real Parabolic Cylinder Functions $U(a, x)$, $V(a, x)$* . ACM Transactions on Mathematical Software 32 (1) (2006).
 - [38] A. GIL, J. SEGURA, N.M. TEMME. *Algorithm 850: Real Parabolic Cylinder Functions $U(a, x)$, $V(a, x)$* . ACM Transactions on Mathematical Software 32 (1) (2006).
 - [39] A. GIL, J. SEGURA, N.M. TEMME. *Numerical methods for special functions*. SIAM (2006).
 - [40] A. GIL, J. SEGURA. *Computing the zeros and turning points of solutions of second order homogeneous linear ODEs*. SIAM J. Numer. Anal. 41, 3 (2003) 827-855.
 - [41] A. GIL, J. SEGURA. *A combined symbolic and numerical algorithm for the computation of zeros of orthogonal polynomials and special functions*. J. Symb. Comp. 35 (2003) 465-485.
 - [42] G.H. GOLUB, J.H. WELSCH. *Calculation of Gauss quadrature rules*. Math. Comp. 23 (1969), 221-230.
 - [43] J. GRAD, E. ZAKRAJŠEK. *Method for evaluation of zeros of Bessel functions*. J. Inst. Maths Applics. 11 (1973), 57-72.

-
- [44] C. C. GROSJEAN. *A property of the zeros of the Legendre polynomials.* J. Approx. Theory. 50 (1987), 84-88.
 - [45] P. HENRICI. *Applied and computational complex analysis.* John Wiley and Sons, 1991.
 - [46] H. HOCHSTADT. *The functions of Mathematical Physics.* Dover, 1986.
 - [47] E. L. INCE. *On the continued fractions associated with the hypergeometric equation.* Edinb. M. S. Proc. 34, (1916) 146-154.
 - [48] W.B. JONES AND W.J. THRON. *Continued fractions. Analytic theory and applications.* Encyclopaedia of Mathematics and its applications. Addison-Wesley Publishing Co. 1980.
 - [49] W.B. JONES AND W.J. THRON. *Numerical stability in evaluating continued fractions.* Math. Comp. 28, 127 (1974), 795-810.
 - [50] H. KI, Y-O. KIM. *On the zeros of some generalized hypergeometric functions.* J. Math. Anal. Appl. 243 (2000), 249-260.
 - [51] A. LAFORGIA, M. E. MULDOON. *Some consequences of the Sturm comparison theorem.* Amer. Math. Monthly, 93-2 (1986), 89-94.
 - [52] A. LAFORGIA, M. L. MATHIS. *Additional monotonicity results for the zeros of Bessel functions.* J. Comp. Appl. Math. (1993), 135-139.
 - [53] A. LAFORGIA, M. E. MULDOON, P. D. SIAFARIKAS. *Árpád Elbert, 1939-2001: a memorial tribute.* J. Comp. Appl. Math. 153 (2003), 1-8.
 - [54] N.N. LEBEDEV. *Special functions and their applications.* Dover, 1972.
 - [55] L. LORCH. *Elementary comparison techniques for certain classes of Sturm-Liouville equations.* Proc. Internat. Conf. Uppsala (1977), 125-133.
 - [56] L. LORENTZEN, H. WAADELAND. *Continued fractions with applications.* North Holland, 1992.
 - [57] D. W. LOZIER, F. W. J. OLVER. *Numerical evaluation of special functions. Mathematics of Computation 1943-1993: A Half-Century of Computational Mathematics.* American Mathematical Society, 1994.
 - [58] Y. L. LUKE. *The Special Functions and Their Approximations.* Academic Press, 1969.
 - [59] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, R.P. SONI. *Formulas and theorems for the special functions of Mathematical Physics.* Springer-Verlag, 1966.
 - [60] I. MARX. *On the structure of recurrence relations.* Michigan Math. J. 2 (1953), 45-50.

-
- [61] I. MARX. *On the structure of recurrence relations II*. Michigan Math. J. 2 (1953), 99-103.
- [62] Y. MIYAZAKI, Y. KIKUCHI, D. CAI, Y. IKEBE. *Error analysis for the computation of zeros of regular Coulomb wave function and its first derivative*. Math. Comp. 70, 235 (2000), 1195-1204.
- [63] S. L. B. MOSHIER. *Methods and programs for mathematical functions*. John Wiley and Sons. 1989.
- [64] M. E. MULDOON. *Properties of zeros of orthogonal polynomials and related functions*. J. Comp. Appl. Math. 48 (1993), 167-186.
- [65] K. E. MULLER. *Computing the confluent hypergeometric function $M(a, b, x)$* . Numer. Math. 90 (2001), 179-196.
- [66] P. NATALINI, B. PALUMBO. *Some monotonicity results on the zeros of the generalized Laguerre polynomials*. J. Comp. Appl. Math. 153, 1-2 (2003), 355-360.
- [67] A. F. NIKIFOROV, V. B. UVAROV. *Special functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser, 1988.
- [68] F. W. J. OLVER. *Asymptotics and special functions*. AK Peters, Wellesley, 1997.
- [69] V.P. PLAGIANAKOS, N.K. NOUSIS, M.N. VRAHATIS. *Locating and computing in parallel all the simple roots of special functions using PVM*. J. Comp. Appl. Math. 133 (2001), 545-554.
- [70] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANERY. *Numerical recipes. The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- [71] E. D. RAINVILLE. *Special functions*. Chelsea Publishing Company, 1960.
- [72] HANS-J. RUNCKEL. *On the zeros of the hypergeometric function*. Math. Ann. 191, (1971), 53-58.
- [73] JAMES B. SEABORN. *Hypergeometric functions and their applications*. Springer, 1991.
- [74] J. SEGURA. *A conjecture regarding the extrema of Bessel functions and its generalization*. J. Math. Anal. Appl. 280 (2003) 54-62.
- [75] J. SEGURA. *The zeros of special functions from a fixed point method*. SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002) 114-133.
- [76] J. SEGURA. *On the zeros and turning points of special functions*. J. Comp. Appl. Math. 153 (2003) 433-440.

-
- [77] J. SEGURA. *On a conjecture regarding the extrema of Bessel functions and its generalization*. J. Math. Anal. Appl. 280 (2003) 54-62.
- [78] R. SPIGLER, M. VIANELLO. *A numerical method for evaluating zeros of solutions of second-order linear differential equations*. Math. Comp. 55, 192 (1990) 591-612.
- [79] J.C.F.STURM. *Mémoire sur les équations différentielles linéaires de second ordre*. Journal de Math. 1, 106-186.
- [80] G. SZEGÖ. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, 1975.
- [81] N. M. TEMME. *An algorithm with ALGOL 60 program for the computation of the zeros of ordinary Bessel functions and those of their derivatives*. J. Comput. Phys. 32 (1979), 270-279.
- [82] N. M. TEMME. *Special functions. An introduction to the classical functions of Mathematical Physics*. John Wiley and sons, 1996.
- [83] N. M. TEMME. *The numerical computation of the confluent hypergeometric function $U(a, b, z)$* . Numer. Math. 41 (1983) 63-82.
- [84] N. M. TEMME. *Recent problems from uniform asymptotic analysis of integrals in particular in connection with Tricomi's Psi-function*. Proceedings of the Conference *Tricomi's Ideas and Contemporary Applied Mathematics* 1998. CWI Report MAS-R9802.
- [85] I. J. THOMPSON, A. R. BARNETT. *Coulomb and Bessel functions of complex arguments and order*. J. Comput. Phys. 64 (1986) 490-509.
- [86] F. G. TRICOMI. *Über die Abzählung der Nullstellen der confluenten hypergeometrischen Funktionen*. Mathematische Zeitschrift 52, 1 (1950) 669-675.
- [87] R. VIDUNAS. *Contiguous relations of hypergeometric series*. J. Comp. Appl. Math. 153, 507-519 (2003).
- [88] G. N. WATSON. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Univ. Press, 1980.
- [89] J. WIMP. *Computation with recurrence relations*. Pitman, 1984.